一、（15 分）袋子中装有 N 只球，除颜色外没有区别，其中白球数为随机变量 X，具有概率分布 $P\{X=k\}=kc,\quad k=1,2,\cdots,N$。

1．求常数 c；

2. 从袋子中任取一球，求取到白球的概率；

3．若所取球为白球，求袋子中恰有 k 只白球的概率 $(1\le k\le N)$。

二、（20 分）设 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，记

$Y=\begin{cases}-1, & X<0\\ 0, & X=0\\ 1, & X>0\end{cases}$，求

1、Y 的概率分布和分布函数；

2、 已知 $Y=-1$ 的条件下，X 的条件分布函数；

3、在 $X<0$ 的条件下，Y 的条件期望；　　4、 $P\{XY<0\}$。

三、（20 分）设二维随机变数 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{a}{2\pi}e^{-x^2-\frac{(y-2)^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty$$

1、 求常数 a；　　2、判断 X 与 Y 独立否？为什么？

3、求 $Z=X^2$ 的密度函数；　　4、求 $W=2X-3Y$ 的密度函数。

四、（20 分）设 (X,Y) 的联合密度函数为：

$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi}+\dfrac{1}{64}y\cos x, & |x|\le\pi,|y|<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，令 $Z=X+Y$，

1、求 Y 与 Z 的相关系数　　　　2、求 $D\left(\sqrt{6}X-3Y\right)$；

3、当 k 取什么值时，$X-kZ$ 与 $Y-kZ$ 不相关？

五、(15 分）设 $\left\{X_n\right\}$ 为独立同分布的随机变量序列，X_n 的概率分布为 $P\left(X_n=2\sqrt{\ln 2n}\right)=P\left(X_n=-2\sqrt{\ln 2n}\right)=\frac{1}{2}$，

1、试证明 $\left\{X_n\right\}$ 服从大数定律；

2、利用中心极限定理，求概率 $P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\sum_{n=1}^{1600}X_n\right|\le 80\right)$ 的近似值.

（注：$\Phi(1)=0.8143,\Phi(2)=0.9775,\Phi(3)=0.99865$ ）

六、(20 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 独立同分布于 $N(0,4)$，令

$$W=\sqrt{\sum_{k=1}^{6}X_{2k-1}^2}，\ U=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}X_{2k}，\ V=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{6}\left(X_{2k}-U\right)^2}，$$

1、确定常数 a，使 $\sum_{k=1}^{4}a\left(X_{2k-1}+X_{2k}\right)^2$ 成为 χ^2 分布；

2、确定常数 b，使 $\frac{bU}{W}$ 成为 t 分布；

3、证明 W,U,V 相互独立，并求 $E\left(W^2+3U^2\cdot V^2\right)$

七、(20 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本($n>1$)，且已知 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

1、证明 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_1=\min\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$，矩估计为 $\hat{\theta}_2=\bar{X}-\frac{1}{2}$，其中 $\bar{X}$ 为样本均值；

2、证明$\hat{\theta}_1$的分布密度函数为$f(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$

3、证明$\hat{\theta}_2$和$\hat{\theta}_1-\dfrac{1}{2n}$均为$\theta$的无偏估计；

4、说明$\hat{\theta}_2$和$\hat{\theta}_1-\dfrac{1}{2n}$哪一个更有效？.

八、（20 分）统计部门为调查 2016 年 5 月份山东省猪肉价格行情，对 36 个市县做了价格统计，得到样本均值$\overline{x}=16.25$(元/斤)，标准差$s=\sqrt{\dfrac{1}{35}\sum_{k=1}^{36}(x_k-\overline{x})^2}=2$（元/斤），设猪肉价格服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 已知上个季度猪肉平均价格$\mu_0=14.25$(元/斤)。

1、在显著性水平$\alpha=0.01$下五月份猪肉价格较上个季度有无明显上涨？

2、求μ的置信水平$1-\alpha=0.99$的双侧置信区间；

3、若有μ的置信水平$1-\alpha=0.99$的双侧置信区间为

$[\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\times a,\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}\times t_{0.996}(15)]$，且满足

$P\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\times a\le\mu\le\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}\times t_{0.997}(35)\}=0.99$，

试确定常数a（用分位数表示）。

（已知：$t_{0.99}(35)=2.4377$，$t_{0.99}(36)=2.4345$，$t_{0.995}\left(35\right)=2.7238$，

$t_{0.995}\left(36\right)=2.7195$　　　$\chi^2_{0.995}(36)=61.581,\ \chi^2_{0.995}(35)=60.275,$

$\chi^2_{0.99}(35)=57.342$，$\chi^2_{0.99}(36)=58.619$)