一、（本题包括 4 个小题，每小题 6 分，共 24 分）求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$　　　　2、$\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$

3、$\lim\limits_{x\to +\infty}e^x\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^x\right)$

4、$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2(x-1)}{x(x-1)}, & x<1\\ x+1, & x\geq 1\end{cases}$

二、（本题包括 2 个小题，第一小题 12 分，第二小题 10 分，共 22 分）

1、设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$

问在点$(0,0)$处：（1）是否连续？（2）是否存在偏导数？（3）是否可微？

2、已知 $e^{xz}+xy+z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

三、（本题包括 2 个小题，每小题 12 分，共 24 分）

1、计算定积分：（1）$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx$；（2）$\int_{-2}^{2}\max(x,x^2)dx$.

2、计算二重积分：

（1）$\iint\limits_D xy d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

（2）$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma$，其中 $D:0\leq y\leq\sqrt{1-x^2},0\leq x\leq 1$.

四、（本题包括 2 个小题，每小题 12 分，共 24 分）

1、讨论曲线 $y=\ln(x^2+1)$凹凸区间及拐点.

2、求函数 $f(x,y)=-\sin x-\sin y+\sin(x+y)$在 x 轴、y 轴与直线 $x+y=2\pi$ 围成的区域上的最小值.

五、（本题包括 2 个小题，每小题 10 分，共 20 分）

1、判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$ 的收敛性.

2、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

六、（本题包括 2 个小题，每小题 10 分，共 20 分）

1、求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解.

2、求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 2e^x$ 的通解.

七、（本题包括 2 个小题，每小题 8 分，共 16 分）

1、已知 $x > 0$，证明不等式：$x - \dfrac{1}{2}x^2 < \ln(1+x)$.

2、设函数 $f(x) > 0$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且有 $f(1) = 2f(0)$，证明：$\exists c \in (0,1)$，使$(1+c)f'(c) = f(c)$.