一、求下列极限（本题 16 分）

1、$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$；　　　　2、$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

二、求导数和高阶导数（本题 16 分）

1、已知 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$；　2、已知 $y=\dfrac{x^3}{x+1}$，求 $y^{(n)}$（$n>2$）

三、证明题（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在二阶连续导数，$f_+'(a)>0$，$f(a)=f(b)=0$，

证明：必存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$。

四、计算积分（本题 18 分）

1、（10 分）设 $I_n=\int\tan^n x dx\ (n\ge 2)$。（1）给出 I_n 的递推公式；

（2）计算 $I_7=\int\tan^7 x dx$；　　2、（8 分） 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx$。

五、应用题（本题 15 分）

求悬链线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 那段的弧长以及该段弧绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积。

六、解答题（本题 20 分）

1.（10 分）已知 $a_{2n-1}=\dfrac{1}{n}$，$a_{2n}=\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx$，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛。

2. （10 分）设 $f_n(x)=\dfrac{x\left(\ln n\right)^{\alpha}}{n^x}$， $n=2,3,\cdots$ ，当 α 为何值时函数列 $\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

七、 多元函数的连续性与可微性（本题 15 分）

讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在（0, 0）点（1）连续；（2）偏导数存在；（3）可微。

八、解答题（本题 10 分）

讨论反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^{\alpha}}\sin\dfrac{1}{x}dx$ （$\alpha>0$）的收敛性。

九、重积分问题（本题 10 分）

设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$

其中 $f(u)$ 为连续可导函数且 $f(0)=0,\ f'(0)=\dfrac{1}{\pi}$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^4}$。

十、曲线积分（本题 10 分）

求 $\int_C\left(4x+\dfrac{2x}{y}\cos\dfrac{x^2}{y}\right)\mathrm{d}x-\dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x^2}{y}dy$，其中 C 是点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 到点 $B\left(\pi,2\pi\right)$ 在上半平面 $(y>0)$ 上的任意逐段光滑曲线。

十一、曲面积分（10 分） 计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[f(x,y,z)+x\right]dydz+\left[2f(x,y,z)+y\right]dzdx+\left[f(x,y,z)+2z\right]dxdy$$

其中 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，$\Sigma: x-y+z=1$ 取第四卦限部分，方向为上侧。