

宁波大学 2020 年博士研究生招生考试初试试题(A 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 2601 总分值: 100 科目名称: 数学物理方程

共 5 题, 每题 20 分

1. (1) 求解一阶偏微分方程, 给出未知函数 $u(x, y)$ 的通解:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- (2) 给定初始条件: $u(0, y) = y^2 + 2y + 1$, 确定 $u(x, y)$ 的具体形式。

2. 用行波法【达朗贝尔解】求解波动方程:

- (1) 写出波动方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (c 为常数) 的通解 $u(x, t)$;

- (2) 给定初始条件 $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2xe^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$, 求解 $u(x, t)$ 的具体形式

3. 用分离变量方法解下面定解问题, 给出 $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq 1, t > 0$):

PDE: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

B.C.: $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$

I.C.: $u(x, 0) = \cos(2\pi x) + 3\cos(3\pi x)$, $u_t(x, 0) = 0$

4. 指数复变函数 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ 具有实部的二元函数 $u(x, y) = e^x \cos y$ 和虚部的二元实函数 $v(x, y) = e^x \sin y$, 证明:

- (1) $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是调和函数, 即它们满足 Laplace 方程;

- (2) 证明曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$, (c_1, c_2 为常数) 相互正交, 即在任意两条曲线的交点上, 两条曲线的法向矢量 (或者切向矢量) 彼此垂直。

5. 给定一维热传导混合边界值问题:

PDE $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$

B.C. $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + ku(L, t) = 0$

- (1) 使用分离变量法, 假设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 写出给定边界条件下关于 $X(x)$ 的固有值问题;

- (2) 写出计算固有值的公式, 以及每个固有值所对应的固有函数 $X_n(x)$;

- (3) 证明任意两个不同固有值所对应的固有函数正交, 即

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$