宁波大学 2020 年博士研究生招生考试初试试题(B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码： 2603 总分值： 100 科目名称： 随机过程

本试题可能用到的公式：

积化和差：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

和差化积：

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\bullet\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\bullet\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\bullet\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\bullet\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

一、 填空及概念题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 假设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量 $Y=aX+1$（a 为常数）服从_________分布，其均值和方差分别为_________和_________。

2. 随机变量 X 和 Y 的协方差定义为______________________________，相关系数定义为____________________________；它反映了两信号之间的__________程度。

3. 平稳随机过程通过频率响应为 $H(\omega)$ 的线性系统后，输入的功率谱密度与输出功率谱密度之间的关系是______________________，高斯随机过程通过线性系统后是否还是高斯随机过程？

4. 若平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_x(\tau)=\frac{a^2}{3}\cos\omega\tau$，则其平均功率 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(\omega)d\omega=$__________________。

宁波大学 2020 年博士研究生招生考试初试试题(B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码： 2603　总分值： 100　科目名称： 随机过程

5. 平稳正态随机过程的任意维概率密度只由__________与__________来确定。

6. 白噪声的自相关函数是______________________________________。

7. 平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数的关系是______________。

8. 说明随机过程各态历经性的定义及其实际意义。

9. $\{X(t), t \geq 0\}$ 为具有参数λ的泊松过程，请解释如下两式的含义：

$$P\left\{X\left(t+h\right)-X\left(t\right)=1\right\}=\lambda h+o(h)$$

$$P\{X\left(t+h\right)-X\left(t\right)\geq 2\}=o(h).$$

10. 设马尔可夫链的一步概率转移矩阵的元素记为 $p_{ij}(i=1,\ldots n, j=1,\ldots n)$，则 p_{ij} 具有以下两个特征：__________和__________。

二、计算题（每题 15 分，共 60 分）

1. 已知随机过程 $\{X(t), t\in[-2,2]\}, X(t)=U+t, U$ 为随机变量，服从 $(0,\pi)$ 上的均匀分布。试求：

（1）任意两个样本函数，并绘出草图；（5 分）

（2）随机过程 $X(t)$ 的特征函数；（5 分）

（3）随机过程 $X(t)$ 的均值函数和自协方差函数。（5 分）

2. 设 $\{\xi(t), -\infty<t<+\infty\}$ 是平稳过程，令 $\eta(t)=\xi(t)\cos(\omega_0 t+\Theta), -\infty<t<+\infty$，其中 ω_0 是常数，Θ为均匀分布在[0,2π]上的随机变量，且 $\{\xi(t), -\infty<t<+\infty\}$ 与Θ相互独立，$R_\xi(\tau)$ 和 $S_\xi(\omega)$ 分别是 $\{\xi(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数与功率谱密度，试证：

（1）$\{\eta(t), -\infty<t<+\infty\}$ 是平稳过程，且自相关函数：

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau. \quad （10 分）$$

（2）$\{\eta(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的功率谱密度为：

$$S_\eta(\omega)=\frac{1}{4}\left[S_\xi(\omega-\omega_0)+S_\xi(\omega+\omega_0)\right]. \quad （5 分）$$

3. 设在[0, t)时段内乘客到达某售票处的数目为一强度是 λ=1（人/分）的泊松过程，试求：

（1）在 2 分钟内有 2 位乘客到达售票处的概率；（5 分）

（2）第 2 位乘客在第 2 分钟内到达售票处的概率；（8 分）

宁波大学 2020 年博士研究生招生考试初试试题(B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码： **2603**　**总分值：** **100**　**科目名称：** **随机过程**

（3）相邻两乘客到达售票处的平均时间间隔。（2 分）

4. 设 $\{X_n, n \in T\}$ 是一个齐次马尔可夫链，其状态空间 $I = \{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

（1）画出该马尔可夫链的状态转移图；（5 分）

（2）求 $P\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 3 \mid X_0 = 1\}$；（5 分）

（3）求 $P\{X_{n+2} = 3 \mid X_n = 1\}$。（5 分）