赣南师范大学

2020年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码：623　　科目名称：数学分析

注：1、此页为试题纸，答题必须使用规定答题纸，答案写在试题纸上无效。

2、本卷满分为150分，答题时间为3小时。

一、（每小题9分,共63分）计算题

1、计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

2、计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt[x]{x}-1)}{\ln x}$.

3、设函数 $f(x)$ 在实数集R上连续且 $f(x)=3x+\int_0^x(t-x)f(t)dt$，求 $f^{(2019)}(0)$ 的值.

4、计算不定积分 $\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx$.

5、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

6、求由方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

7、设 $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

（1）计算 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y),\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$.（2）讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在？

二、（本题12分）设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,m$, 其中 m 为正整数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}.$$

三、（本题12分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)\in[0,1]$，

求证存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

四、(本题 12 分)设 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, n = 1,2,\cdots$.讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是否一致收敛？说明理由.

五、(本题 12 分). 设 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 f' 在 $[a,b]$ 上可积， $f(a)=0$ ，证明: $2\int_a^b [f(x)]^2 dx \le (b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx$.

六、(本题 10 分) 确定实数 a,b 的值使积分 $F(a,b) = \int_0^1 \left(ax + b - \dfrac{1}{1+x^2} \right)^2 dx$ 达到最小值.

七、(本题 10 分) 确定幂级数 $\sum (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$ 的收敛域.

八、(本题 9 分) 选取 a,b，使表达式

$$[(x+y+1)e^x + ae^y]dx + [be^x - (x+y+1)e^y]dy$$

为某一函数的全微分，并求出这个函数.

九、(本题 10 分) 计算曲面积分 $\iint_S \dfrac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}} dxdz$, 其中 S 由曲面 $y = x^2 + z^2$ 与平面 $y=1, y=2$ 所围立体表面的外侧.