机密★启用前

重 庆 邮 电 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：高等代数 A 卷

科目代码：822

考生注意事项

1、答题前，考生必须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2、所有答案必须写在答题纸上，写在其他地方无效。
3、填（书）写必须使用 0.5mm 黑色签字笔。
4、考试结束，将答题纸和试题一并装入试卷袋中交回。
5、本试题满分 150 分，考试时间 3 小时。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & \cdots & 3a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{vmatrix}=$（　　　　）。

A. D　　　　　　B. $2^n D$

C. $n!\ D$　　　　　　D. $-nD$

2、一个 $n(\geq 2)$ 级方阵 A 经过若干次初等变换之后变为 B，则一定有（　　　　）。

A. $|A|=|B|$　　　　　　B. $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

C. 秩 $(A)=$ 秩 (B)　　　　　　D. $A^*=B^*$

3、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 都是三维线性空间 V 的基，且 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 基到基（　　　　）的过渡矩阵。

A. β_1,β_2,β_3　　　　　　B. β_2,β_1,β_3

C. β_3,β_2,β_1　　　　　　D. β_2,β_3,β_1

4、(1) 含有零向量的向量组一定线性相关；

(2) 等价的向量组一定含有相同个数的向量；

(3) 设 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r\}$ 线性无关，则 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_{r-1}\}$ 也线性无关；

(4) $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r\}$ 线性相关，则 α_r 一定可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\ \alpha_{r-1}$ 线性表出；

以上说法正确的有（　　　）个。

A. 1 个　　　B. 2 个　　　C. 3 个　　　D. 4 个

5、若 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则（　　　　）。

A. $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$　　　　B. $(f(x),g(x))=(f(x),r(x))$

C. $(f(x),q(x))=(g(x),r(x))$　　　　D. $(f(x),r(x))=(g(x),q(x))$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

6、设 $f(x)=x^3+x^2+ax+b, g(x)=x^2+x-2$。若 $(f(x),g(x))=g(x)$，则 $a=$__________，$b=$__________。

7、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3+x_2^2+5x_3^2$ 的秩为________，正惯性指数是________。

8、已知 3 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2，-3，则 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$____________。

9、已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a=$______以及 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为____________。

10、若 $W=\{A\in P^{n\times n}\mid A^T=-A\}$，则 $\dim W=$______________。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 60 分）

11、（8 分）若 $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$，求 $f(x)$ 的有理根，并写出 $f(x)$ 在实数域上的标准分解式。

12、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\alpha+\beta&\alpha\beta\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$，其中 $\alpha\neq\beta$。

13、（10 分）讨论 λ, a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多解，并在有解时求其解。

14、（10 分）设数域 P 上三维线性空间的线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

（1）求 σ 在基

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 \end{aligned}$$

下的矩阵；

（2）设 $\boldsymbol{\xi} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，求 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标。

15、（12 分）设方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵。

16、（10 分）设 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$，其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\ 1,\ 2,\ -1,\ -2\ ), \\ \alpha_2 = (\ 3,\ 1,\ \ 1,\ \ 1\ ), \\ \alpha_3 = (-1,\ 0,\ \ 1,\ -1\ ) \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = (\ 2,\ 5,\ -6,\ -5\ ), \\ \beta_2 = (-1,\ 2,\ -7,\ \ 3\ ) \end{cases}$$

求 $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 的维数和一组基。

四、证明题（本大题共 5 小题，共 50 分）

17、（10 分）证明：如果 $x^2 + x + 1 \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$，那么

$$x - 1 \mid f_1(x), x - 1 \mid f_2(x)$$ 。

18、（12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级矩阵。证明：$R(\boldsymbol{A}) \le 1$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表为一个 $n \times 1$ 矩阵和一个 $1 \times n$ 矩阵的乘积。

19、（10 分）设线性空间 V 与 U 同构，σ 是 V 到 U 的一个同构映射。证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基的充要条件是 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 U 的一个基。

20、（10 分）设 $\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$。证明：$P^n$ 可以分解为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间与 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的直和。

21、（8 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一个基，证明：

(1) 如果 $\boldsymbol{\gamma} \in V$ 使 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$，那么 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$；

(2) 如果 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2 \in V$ 使对任一 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，有 $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\alpha})$，那么 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_2$。