中 山 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：891

科目名称：高等代数（A）

考试时间：2018 年 12 月 23 日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一、（15 分）设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，$g(x)=x^3+x^2+2x-3$。求 $(f(x),\ g(x))$。

二、（10 分）通过正交变换化二次型 $f(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 为标准形，并写出所用正交变换矩阵。

三、（15 分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}。$$

四、（10 分）证明：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{pmatrix}\le n+\mathrm{rank}(A)$。

（I 为单位矩阵，$\mathrm{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩。）

五、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，判断 A 是否可逆？若可逆，求 A^{-1} 和 A^*。

（A^* 为 A 的伴随矩阵。）

六、（15 分）已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & a & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n\cdots} & a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}。

七、（15 分）问 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并在有解时写出解。

八、（10 分）求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量，并写出一个正交矩阵 u，使 $u^T Au$ 为对角形矩阵。

九、（10 分）若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-2I=O$，证明 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$。

（题中 O 表示所有元素均为零的矩阵。）

十、（10 分）设 A，B 均为 n 阶方阵，证明：$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B|\cdot|A-B|$。

十一、（15 分）设 W_1, W_2 都是数域 F 上的向量空间 V 的有限维子空间，证明 W_1+W_2 也是 V 的子空间，并且 $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$。

十二、（15 分）若矩阵 A 满足 $A^T=-A$，则称 A 为反对称矩阵。证明：反对称实矩阵的特征值是零或纯虚数。