中 山 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：601

科目名称：高等数学（A）

考试时间：2018 年 12 月 23 日上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

本卷共十五大题，每题 10 分，满分为 150 分。

一、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan x+x^{2019}\sin\dfrac{1}{x^{2018}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

二、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\sec(x-2)}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)}, & x>2,\\ \dfrac{b}{\arccos(x-2)}, & x\leq 2.\end{cases}$ 请问 b 取何值时，$f(x)$ 在 $x=2$ 连续？

三、请问 a 取何值时，$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin(3x)$ 在 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 时取得极值？求出该极值，并指出它是极大值还是极小值。

四、计算 $\int_0^{\ln 5}\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x.$

五、过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D，求 D 的面积。

六、求累次积分 $I=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y$。

七、计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1,z=2$ 所围立体之表面外侧。

八、求微分方程 $y''+3y'+2y=\sin 2x$ 的通解。

九、求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$的收敛半径、收敛区间和收敛域。

十、求函数$(1+x)e^{-x}$的马克劳林级数及其收敛区间。

十一、已知A是$n\times n\ (n\geq 2)$的矩阵, 证明:

(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$，(其中A^*为A的伴随矩阵)；

(2) 利用上面结论，证明：秩$(A^*)=\begin{cases}n, 当秩(A)=n,\\ 1, 当秩(A)=n-1,\\ 0, 当秩(A)<n-1.\end{cases}$

十二、设向量组$\eta_1=(1,0,1)^T,\eta_2=(0,1,1)^T,\eta_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\xi_1=(1,1,1)^T$，$\xi_2=(1,2,3)^T$，$\xi_3=(3,4,a)^T$线性表示．(1) 求$a$的值；(2) 将向量组$\xi_1,\xi_2,\xi_3$用向量组$\eta_1,\eta_2,\eta_3$线性表示。

十三、设有以下线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\ x_2-x_3=a_2\\ x_3-x_4=a_3,\\ x_4-x_5=a_4\\ x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

证明：该方程组有解的充分必要条件为$\sum_{i=1}^{5}a_i=0$，并用基础解系写出该线性方程组的一般解。

十四、请问a,b取何值时，方程组$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\ x_1+bx_2+x_3=3\\ x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$无解，有唯一解或有无穷多解？若有唯一解，请写出唯一解，若有无穷多解，请写出该方程组的通解。

十五、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3\ (t>0)$，通过正交变换 X=QY 可将其化为标准型$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

(1) 求t的值；(2) 求正交变换矩阵Q。