

# 隧道围岩开挖及锚喷衬砌稳定可靠度计算

李 帅<sup>1</sup>, 杜俊旺<sup>1</sup>, 苏永华<sup>2</sup>, 丁心香<sup>1</sup>

(1. 河南省交通规划设计研究院股份有限公司, 河南 郑州 451450; 2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:** 对隧道围岩开挖进行线弹性收敛分析, 导出围岩径向位移计算公式; 基于薄壁筒理论及锚杆端锚理论, 确定隧道围岩锚喷衬砌支护抗力求解方法; 进一步推演得到隧道围岩开挖及锚喷衬砌功能函数。针对功能函数表达式为高度非线性隐式导致常规 SORM 难以直接应用的问题, 基于数值差分原理推导梯度矢量求解公式, 以此置换常规 SORM 中梯度的解析求解方式, 构建一种不受功能函数形式制约的隧道稳定可靠度直接计算途径。利用该方法对工程实例进行分析, 与蒙特卡洛法计算结果进行对比, 验证其精确性及广泛适用性, 同时在标准独立正态空间内建议了具有普遍适用意义的步长系数取值  $\nu = 0.01$ 。

**关键词:** 隧道工程; 锚喷支护; 可靠度; 步长系数

**中图分类号:** U 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2019)08 - 1627 - 08

## Calculation of stability reliability for the surrounding rock excavation and rockbolt-shotcrete support in tunnel structure

LI Shuai<sup>1</sup>, DU Junwang<sup>1</sup>, SU Yonghua<sup>2</sup>, DING Xinxiang<sup>1</sup>

(1. Henan Provincial Communications Planning and Design Institute Co., Ltd., Zhengzhou, Henan 451450, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

**Abstract:** A calculation formula for the radial displacement of surrounding rock was derived according to the convergence analysis of linear elasticity of surrounding rock, and a solving method of the support resistance of shotcrete lining and rockbolts was determined based on the thin-wall cylinder theory and the point anchored reinforcement theory. Performance functions involving excavation of the surrounding rock as well as rockbolt-shotcrete support were deduced. Aiming at the problem that the common second order reliability method(SORM) could not be applied directly due to that the performance functions were highly nonlinear and implicit, a calculation formula of gradient vectors, instead of the analytical algorithm used in common SORM, was deduced based on the difference principle, and a direct calculation method for stability reliability of tunneling structure, which is free from the constraint of the performance function form, was proposed. A tunnel project was analyzed by the developed method, and comparison between the calculation results by the method and Monte-Carlo method was performed. It is shown that the developed method is widely applicable and accurate. Meanwhile, a suitable step length coefficient  $\nu = 0.01$  which has universally applicable meaning in the independent standard normal space was suggested.

**Key words:** tunnel engineering; rockbolts and shotcrete support; reliability; step length coefficient

**收稿日期:** 2018 - 11 - 09; **修回日期:** 2019 - 03 - 25

**基金项目:** 河南省交通运输厅科技项目(2019J - 2 - 14); 国家自然科学基金资助项目(51878266)

Supported by the Henan Provincial Transportation Technology Plan Project(Grant No. 2019J - 2 - 14) and National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51878266)

**作者简介:** 李 帅(1989 - ), 男, 博士, 2011年毕业于华北水利水电大学岩土工程专业, 现任助理研究员, 主要从事边坡及地下结构稳定性分析和优化设计等方面的研究工作。E-mail: shuai\_li@hnu.edu.cn

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2018.1303

# 1 引言

目前，穿山、越岭隧道已是山区公路建设的重要特色之一。隧道围岩地层环境及力学特性复杂，导致决定其稳定性的各种因素存在不可忽略的不确定性，利用可靠性分析方法研究这些不确定性对结构稳定性的影响，计算结构失稳风险，能够更为全面地对隧道安全度进行评估。

二次二阶矩可靠性方法(SORM)在一次二阶矩可靠性方法(FORM)的基础上考虑了极限状态曲面的凹凸性<sup>[1-2]</sup>，是一种精度相对较高、并受相关规范<sup>[3]</sup>所推荐使用的可靠度计算方法，其中，利用Newton-Leibniz计算验算点处梯度值是SORM重要步骤之一。

现代地下结构支护理论将围岩与支护看做一个整体，容许支护-围岩复合体系产生有限制的协调变形，以充分发挥围岩自承能力<sup>[4]</sup>。对于赋存于天然环境下的支护-围岩结构系统，其功能函数的本质是利用随机变量表示出系统自身抗力与荷载效应(或容许变形与实际变形)之间的关系，由于支护-围岩结构系统自身既是抗力源又是荷载源的特性，加上系统受力变形机制相当复杂，导致描述系统稳定状态的功能函数常表现为高度非线性、隐式或有限元等非解析形式<sup>[5-7]</sup>，相应验算点处梯度值难以解析求解，进而极大地制约了SORM解决隧道结构稳定可靠度的能力。

有鉴于此，本文基于G. Kirsch公式<sup>[4]</sup>和轴对称圆筒模型，建立隧道开挖及锚喷衬砌功能函数，借助有限差分理论，结合K. Breitung<sup>[2]</sup>提出的SORM计算程序，构建了一套操作过程简洁、精度可靠的隧道围岩失稳概率求解的SORM方法。

# 2 隧道围岩结构功能函数

隧道围岩开挖后，开挖面处围岩解除了原有约束，洞点各处应力状态改变导致围岩向内发生变形位移，称之为“收敛”，若围岩强度较高，整体性较好，断面形状有利，则变形达到一定程度后将自行终止，此时洞壁围岩达到新的稳定平衡状态；反之，围岩的变形将自由发展下去，最终导致隧道围岩整体失稳破坏，这种情况下，就需要适时地对开挖后的围岩设置支护结构，对围岩产生径向抗力以阻止其变形，称之为“约束”。地下结构理论中的收敛-

约束方法就是基于以上观点而形成的设计分析模型之一，可以看出，隧道开挖后的变形位移量以及支护时的支护阻力是隧道围岩收敛-约束设计原理所需要考虑的2个重要方面。

## 2.1 隧道围岩开挖功能函数

图1为隧道围岩开挖时的力学分析模型，其中， $R, \theta$ 为围岩内任一点的极坐标， $\sigma_r, \sigma_t, \tau_{rt}$ 分别为围岩中任一点径向应力、切向应力和剪应力，将隧道围岩开挖视作在有孔的无限平面上作用有垂直均布荷载 $\sigma_z$ 和水平荷载 $\sigma_x$ 形式，假定围岩为连续、弹性体介质，开挖后周围围岩均发生弹性变形，则在围岩中开挖半径为 $R_0$ 的圆形孔洞后，其二次应力状态可用弹性力学中的G. Kirsch公式<sup>[4]</sup>表示出围岩中任一点位移：

$$u = \frac{(1 + \mu)\sigma_z R_0^2}{2ER} \left\{ (1 + \lambda) + (1 - \lambda) \left[ 4(1 - \mu) - \frac{R_0^2}{R^2} \right] \cos(2\theta) \right\} \quad (1)$$

$$v = -\frac{(1 + \mu)\sigma_z R_0^2}{2ER} (1 - \lambda) \left[ 2(1 - 2\mu) + \frac{R_0^2}{R^2} \right] \sin(2\theta) \quad (2)$$

式中： $u, v$ 分别为围岩径向位移和切向位移； $\mu$ 为围岩泊松比； $E$ 为围岩弹性模量； $\sigma_z$ 为初始地应力， $\sigma_z = \gamma H_c$ ， $\gamma$ 为岩体自重， $H_c$ 为隧道中心点埋深； $\lambda$ 为侧压力系数， $\lambda = \sigma_x / \sigma_z$ 。

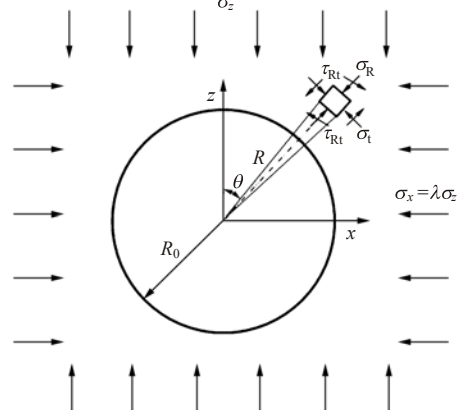


图1 隧道开挖力学分析模型

Fig.1 Mechanical analysis model of tunnel excavation

$\lambda = 1$ 时，围岩切向位移 $v = 0$ ，孔洞周边位移呈轴对称分布，根据收敛判定准则，此时隧道围岩功能函数可表示为

$$Z(X) = u_{max} - u_{pl} \quad (3)$$

式中： $X$ 为隧道围岩基本随机变量的向量； $u_{pl}$ 为围

岩径向最大位移，一般可取拱顶处位移； $u_{\max}$  为围岩最大容许径向位移， $u_{\max} = R_0 \varepsilon_{\max}$ ， $\varepsilon_{\max}$  为最大容许位移比率，根据 Q. Lv 等<sup>[8-9]</sup>的研究， $\varepsilon_{\max}$  可取 2%。

### 2.2 隧道围岩锚喷衬砌功能函数

#### (1) 围岩最小支护阻力

围岩开挖后，围岩向洞室内发生径向变形，若最大径向变形量  $u_{pl}$  超过围岩最大容许径向位移  $u_{\max}$  时，根据围岩与支护结构间相互作用关系，需要在洞室周边位移达到极限位移  $u_{\max}$  以前施加支护结构以维持洞室稳定，并且此时围岩压力为最小  $p_{\min}$ ，则轴对称条件下，根据剪切滑移理论<sup>[10]</sup>：

$$p_{\min} = \gamma R_{\max} - \gamma R_0 \quad (4)$$

式中： $R_{\max}$  为与  $p_{\min}$  对应的最大容许松动区半径， $R_0$  为隧道开挖半径(或等代圆半径)。

根据隧道围岩应力和位移的弹塑性分析<sup>[11]</sup>，轴对称条件下最大容许松动区半径  $R_{\max}$  为

$$R_{\max} = R_0 \left[ \frac{(1 - \sin \varphi)(c \cot \varphi + \sigma_z)}{(1 + \sin \varphi)(c \cot \varphi + p_{\min})} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}} \quad (5)$$

式中： $\sigma_z$  为围岩初始地应力( $\lambda = 1$ )； $c$ ， $\varphi$  分别为围岩 - 支护体系的黏聚力和内摩擦角，可以用下式计算：

$$\left. \begin{aligned} c &= c_0 + \tau_a A_s / (S_a S_b) \\ \varphi &= \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中： $c_0$ ， $\varphi_0$  分别为围岩黏聚力和内摩擦角； $\tau_a$ ， $A_s$ ， $S_a$ ， $S_b$  分别为锚杆的抗剪强度、横截面积及纵、横间距。

联立式(4)和(5)，可以得到围岩最小压力即最小支护阻力  $p_{\min}$ ：

$$p_{\min} = \gamma R_0 \left[ \frac{(1 - \sin \varphi)(c \cot \varphi + \sigma_z)}{(1 + \sin \varphi)(c \cot \varphi + p_{\min})} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}} - \gamma R_0 \quad (7)$$

#### (2) 混凝土喷层支护阻力

对于隧道围岩锚喷衬砌结构来说，轴对称条件下其结构体系的力学作用模式如图 2 所示，按照现代隧道支护观点，围岩为主要承载体，衬砌结构作为荷载承载的辅助体，混凝土喷层厚度  $d_s$  一般较小 ( $d_s \leq 0.04R_0$ )<sup>[12]</sup>，其支护阻力  $p_a$  可以用薄壁圆筒理论进行计算：

$$p_a = \frac{E_c d_s (u_{R_0}^a - u_0)}{R_0^2 (1 - \mu_c^2)} \quad (8)$$

式中： $E_c$ ， $\mu_c$  分别为喷射混凝土的弹性模量和泊松比； $u_{R_0}^a$  为洞壁围岩位移； $u_0$  为喷层支护前的洞壁围岩位移。

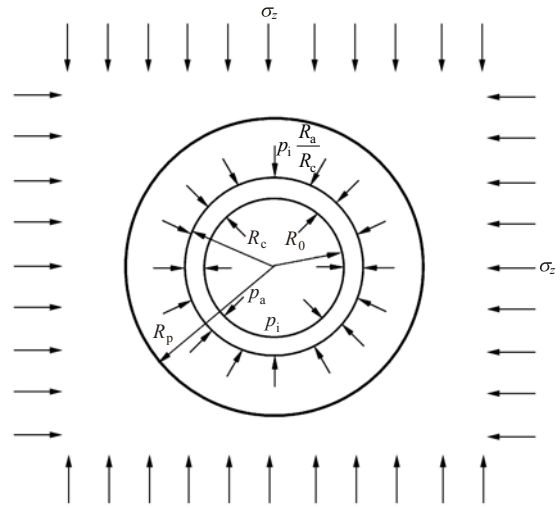


图 2 锚喷衬砌力学作用模式

Fig.2 Mechanical mode of rockbolts and shotcrete lining

洞壁围岩任一点  $R$  处位移  $u_R^a$  可用下式计算<sup>[13]</sup>：

$$u_R^a = \frac{R_0^2 (1 + \mu)(\sigma_z \sin \varphi + c \cos \varphi)}{ER} \left[ \frac{(1 - \sin \varphi)(c \cot \varphi + \sigma_z)}{(c \cot \varphi + p_{\min})} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}} \quad (9)$$

#### (3) 锚杆支护阻力

当洞室周围设有均布径向锚杆时，对于轴对称条件下的点锚式锚杆，如图 2 所示，根据锚杆与围岩共同变形理论，锚杆所提供的支护阻力  $p_i$  为

$$p_i = \frac{\left( u_{R_0}^a - u_0^a - u_{R_c}^a + \frac{R_0 u_0^a}{R_c} \right) E_b A_s}{(R_c - R_0) S_a S_b} \quad (10)$$

式中： $R_c$  为锚杆长度； $u_{R_0}^a$ ， $u_{R_c}^a$  分别为  $R = R_0$ (洞壁处)、 $R = R_c$ (锚杆内端处)处围岩位移； $u_0^a$  为施加锚杆支护前洞壁位移，一般取  $u_0^a = (0.5 \sim 0.8)u_0$ ； $E_b$  为锚杆弹性模量。

#### (4) 隧道围岩锚喷衬砌结构功能函数

将维持支护 - 围岩体系平衡所需要的最小支护阻力和锚喷支护所提供的支护力间的平衡作为隧道围岩出现松动塌落的判定条件，则复合体系结构功能函数可以表示为

$$Z = p_a + p_i - p_{\min} = \frac{E_c d_s (u_{R_0}^a - u_0)}{R_0^2 (1 - \mu_c^2)} + \frac{\left( u_{R_0}^a - u_0^a - u_{R_c}^a + \frac{R_0 u_0^a}{R_c} \right) E_b A_s}{(R_c - R_0) S_a S_b} - p_{\min} \quad (11)$$

综合观察式(4)~(11)中的  $p_a$ ， $p_i$ ， $p_{\min}$  及  $Z$  的表

达式可以看出： $p_a, p_i$ 为有关  $c, \varphi, \gamma, E$  等多参数的复杂函数，而从式(7)可以看出， $p_{\min}$  又是包含其自身的幂函数，因此结构功能函数  $Z$  是一个涉及幂函数的高度非线性复杂隐式函数，常规 SORM 无法对其失效概率进行直接求解。

### 3 隧道围岩可靠度求解的 SORM

#### 3.1 若干约定

设隧道围岩基于所选择的判定指标(变形、应力、荷载等)而建立起的能够描述其稳定状态的功能函数为  $Z = g(X)$ ， $X$  为结构体系涉及的物理、力学属性及场环境等  $n$  个基本随机变量  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  组成的随机向量。原始随机空间( $x$ -空间)内  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，变换至标准独立正态空间( $u$ -空间)内相应的随机向量可表示为  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ，则功能函数值  $Z = g(X) = g(Y)$ 。

通常情况下  $x$ -空间内随机变量  $X_i$  之间可能是相关的非正态随机变量，由于在随机变量的  $u$ -空间进行可靠性分析能带来很大方便，所以对于非独立、非正态随机变量需要进行变换。由于相关、非正态随机变量在  $x$ -空间与  $u$ -空间之间的相互变换已有相应方法体系和成熟的操作流程<sup>[14-15]</sup>，在随后的公式推导及计算分析中，仅给出随机变量在  $x$ -空间与  $u$ -空间之间的变换结果。为了方便，将随机变量由  $x$ -空间向  $u$ -空间的变换称为正变换，反之称为逆变换。

SORM 在许多可靠度文献中已有完整阐述，差分也是人们熟知的一种数值方法，因此，除了必要的概念外，已有的 SORM 及差分理论不再赘述。

#### 3.2 二次二阶矩法基本计算流程

SORM 首先按照 FORM 程序计算可靠指标  $\beta$  和相应验算点  $y^*$ ，然后对失效概率  $P_f$  进行二阶修正计算。按照 A. M. Hasofer 和 N. C. Lind<sup>[1]</sup>， $u$ -空间内，可靠指标  $\beta$  可用以下公式计算：

$$\beta = \frac{G(y^*) - \nabla G(y^*)^T y^*}{\|\nabla G(y^*)\|} \quad (12a)$$

式中： $\nabla G(y^*)$  为  $Z = G(Y)$  在验算点  $y^*$  处的梯度向量，并且有

$$\left. \begin{aligned} \nabla G(y^*) &= \left\{ \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_1}, \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_2}, L, \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_n} \right\}^T \\ \|\nabla G(y^*)\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n [\partial G(y^*) / \partial Y_i]^2} \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

可靠指标  $\beta$  与验算点  $y^*$  存在如下关系：

$$y^* = \alpha_y \beta \quad (13)$$

式中： $\alpha_y$  为灵敏度向量，可由下式计算：

$$\alpha_y = - \frac{\nabla G(y^*)}{\|\nabla G(y^*)\|} \quad (14)$$

式(12)~(14)即为 FORM 基本计算程序，可以迭代得到可靠指标  $\beta$  及相应验算点  $y^*$ ，初始迭代验算点一般可取  $y^{*(0)} = (y_1^{*(0)}, y_2^{*(0)}, \dots, y_n^{*(0)}) = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$ 。

根据 K. Breitung<sup>[2]</sup>所提出的思路，将功能函数的 Taylor 展开式保留至二次项，以二次曲面代替原极限状态曲面，则功能函数在验算点  $y^*$  处的二阶偏导数值矩阵即 Hessian 矩阵为

$$\nabla^2 G(y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_1^2} & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_1 \partial Y_2} & L & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_1 \partial Y_n} \\ \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_2 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_2^2} & L & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_2 \partial Y_n} \\ M & M & O & M \\ \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_n \partial Y_1} & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_n \partial Y_2} & L & \frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_n^2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

利用 Gram-Schmidt 正交化建立一个第  $n$  列为单位向量  $\alpha_y$  的正交矩阵，即： $H = [H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, \alpha_y]^T$ ，同时令：

$$Q = [Q_1, Q_2, L, Q_n]^T = - \frac{\nabla^2 G(y^*)}{\|\nabla G(y^*)\|} \quad (16)$$

则失效概率  $P_f$  可采用下式进行二阶修正计算：

$$P_f \approx \frac{\Phi(-\beta)}{\sqrt{\det[I - \beta(H^T QH)_{n-1}]}} \quad (17)$$

从上述 A. M. Hasofer 和 N. C. Lind<sup>[1]</sup>及 K. Breitung<sup>[2]</sup>所提算法的计算流程中可以看出，过程中一个重要步骤是对功能函数的一阶、二阶偏导数进行求解，这对于表达式为显式解析式且复杂性程度不高的功能函数是切实可行的；但当功能函数表现为高度非线性、隐式或有限元等非解析形式时，其偏导数通常是难以解析求解的，进而严重限制了概念清晰、精度可靠的 SORM 在复杂结构可靠度计算中的应用。

近年来，许多学者针对 SORM 的这种局限性提出了很多改进算法，如随机有限元法<sup>[16]</sup>、响应面法<sup>[17]</sup>、

支持向量机法<sup>[18]</sup>、Kriging 法<sup>[19]</sup>等，这些算法精度较高，但计算中大都涉及冗余过渡参数及向量矩阵，数理基础常处在一般设计师无法企及的高度上，研究多侧重理论探索，用来解决实际工程可靠度问题就出现不适和困难。

### 3.3 差分求解偏导数

为解决 SORM 中关键的功能函数偏导数求解问题，引入了数值差分理论。苏永华等<sup>[6]</sup>详细推导了二维空间内利用差分理论求解函数导数的计算公式，函数  $f(x)$  对自变量  $x_0$  的一阶导数和二阶导数分别为

$$f'(x_0) \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \quad (18)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{y(x_0 + 2h) - 2y(x_0 + h) + y(x_0)}{h^2} \quad (19)$$

式中： $x_0$  为验算点， $h$  为步长。

当功能函数涉及多个自变量时，多维空间内利用差分法近似求解验算点处的一阶、二阶偏导数，原理与二维空间内类似。

因此，可以做如下推导：在  $u$ -空间内， $Y_i$  的步长可表示为  $h_i = \nu y_i$ ， $\nu$  为步长系数， $y_i = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + \nu y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的一阶扰动点； $y_{ii} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + 2\nu y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的二阶扰动点； $y_{ij} = (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_j + \nu y_j, y_{j+1}, \dots, y_{i-1}, y_i + \nu y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的混合二阶扰动点，则根据节 3.1 得出的  $Z = g(X) = g(Y)$  结论，功能函数  $Z$  在验算点  $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  处的一阶梯度近似值  $\partial G(y^*) / \partial Y_i$ ，二阶梯度近似值， $\partial^2 G(y^*) / \partial Y_i \partial Y_j$  可分别表示为( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ):

$$\frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_i} \approx \frac{G(y_i) - G(y^*)}{\nu y_i} = \frac{g(x_i) - g(x^*)}{\nu y_i} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_i^2} \approx \frac{G(y_{ii}) - 2G(y_i) + G(y^*)}{(\nu y_i)^2} = \frac{g(x_{ii}) - 2g(x_i) + g(x^*)}{(\nu y_i)^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 G(y^*)}{\partial Y_i \partial Y_j} \approx \frac{G(y_{ij}) - G(y_j) - G(y_i) + G(y^*)}{\nu^2 y_i y_j} = \frac{g(x_{ij}) - g(x_j) - g(x_i) + g(x^*)}{\nu^2 y_i y_j} \quad (22)$$

从式(20)~(22)可以看出，该推导公式实际上利用了  $Z = g(X) = G(Y)$  这一条件，因为对于复杂岩土

结构其功能函数在  $x$ -空间内通常表现为高度非线性或隐式，导致  $G(Y)$  的表达式通常难以确定，而本方法的梯度值求解存在于  $u$ -空间内，对梯度的求解只借助了随机变量在  $x$ -空间与  $u$ -空间的相互转换方法<sup>[14-15]</sup>，而不必求解功能函数在  $u$ -空间的具体表达式，这为将差分求解偏导数嵌入到 SORM 计算程序中提供了极大便利。

### 3.4 基于差分理论的 SORM 计算流程

将节 3.2 中的梯度解析求解思路采用节 3.3 的差分求解技术代替，即可构建出一种能够直接求解功能函数为高度非线性、隐式或有限元等非解析形式 SORM 算法，其具体计算流程如图 3 所示。

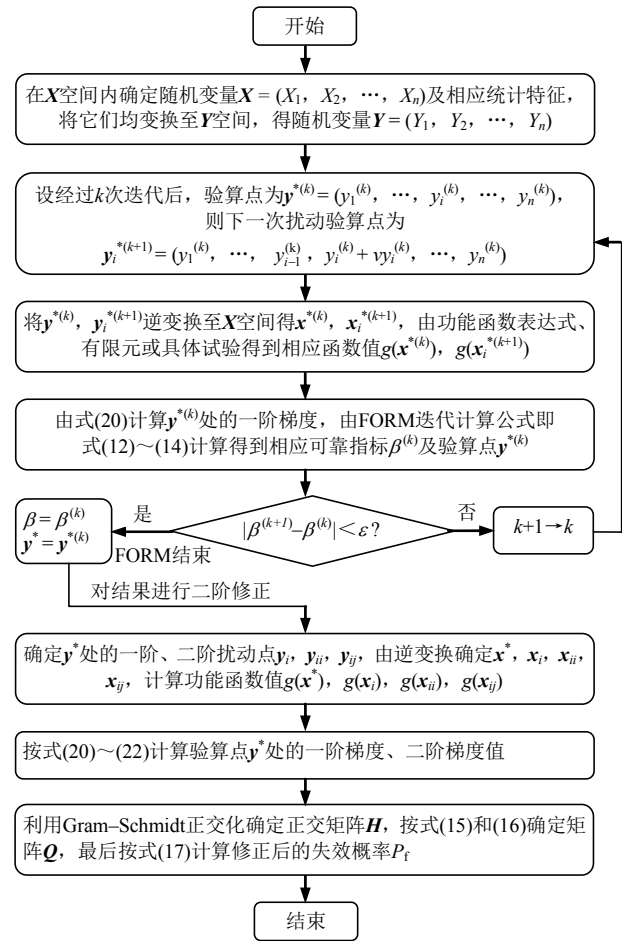


图 3 基于差分理论的 SORM 计算流程  
Fig.3 Execution flow of difference-based SORM

## 4 工程实例应用及分析

### 4.1 工程概况

通渝隧道位于重庆市城口县与开县交界处，是“8 小时重庆”工程的重要组成部分，隧道全长 4 279 m，属双向行驶的单洞越岭特长隧道，取 K20+800 一段隧道进行分析计算。隧道开挖断面为马蹄形，等代圆半径  $R_0 = 6.05$  m，最大覆盖层厚度 150 m

左右。根据现场评估及工程岩体分级，穿越地段为V级较好岩体。隧道采用新奥法施工，开挖后初期采用锚杆并喷射混凝土支护。锚杆长度  $L = 3.0\text{ m}$ ，纵横间距为  $S_c = S_l = 1.0\text{ m}$ ，喷层采用C25混凝土，设计厚度  $d_s = 0.15\text{ m}$ 。

根据工程经验及实地情况分析，由于隧道围岩岩体为天然材料，其相关参数黏聚力  $c$ 、内摩擦角  $\varphi$ 、重度  $\gamma$ 、弹性模量  $E$  及泊松比  $\mu$  随着围岩深度及范围变异性较大，因此将其作为随机变量考虑，统计特征如表1所示；相对来说，混凝土喷层及锚杆多为人工制造材料，其变异性相对较小，为方便计算，将其相关参量作为确定性参数处理，取值如下：混凝土弹性模量  $E_c = 29.50\text{ GPa}$ ，重度  $\gamma_c = 24.58\text{ kN/m}^3$ ，泊松比  $\mu_c = 0.15$ ，喷层支护前洞壁位移  $\mu_0 = 21\text{ mm}$ ；锚杆截面积  $A_s = 380\text{ mm}^2$ ，弹性模量  $E_b = 210\text{ GPa}$ ，抗剪强度  $\tau_b = 312\text{ MPa}$ ，锚杆支护前洞壁位移  $\mu_0^a = 11.5\text{ mm}$ 。

表1 基本随机变量统计特征

Table 1 Statistical characteristics of the random variables

统计特性	均值 $\bar{u}$	标准差 $\sigma$	分布类型
$c/\text{MPa}$	0.625	0.083	正态
$\varphi(^{\circ})$	30.7	2.487	正态
$\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	26.5	3.912	正态
$E/\text{GPa}$	3.66	0.524	正态
$\mu$	0.29	0.045	正态

### 4.2 围岩开挖稳定可靠度计算

该隧道围岩最大容许位移<sup>[8-9]</sup>  $u_{\max} = R_0 \varepsilon_{\max} = 0.121\text{ m}$ ，以  $\gamma, \mu, E$  为基本随机变量，功能函数在  $x$ -空间内可以表示为  $Z = g(\mathbf{X}) = g(\gamma, \mu, E) = g(X_1, X_2, X_3) = 0.12 - \mu_{pl}(\mu_{pl}$  可取拱顶处位移)，相应的变换到  $u$ -空间内为  $Z = G(\mathbf{Y}) = G(Y_1, Y_2, Y_3)$ 。利用精度普遍被认可的蒙特卡洛法计算失效概率，模拟计算100万次后计算结果趋于稳定，得到围岩开挖失效概率  $\hat{P}_f = 7.245\%$ ，可将该结果作为“准精确解”。

利用节3.4的SORM计算流程，编制相应MATLAB计算程序，计算结构可靠度，收敛误差  $\varepsilon$  取0.005，表2为不同步长系数下计算结果。

从表2可以看出，随步长系数在0.1~0.001范围内逐渐减小，结构可靠指标  $\beta$  逐渐增加， $\nu = 0.01$  时，结果收敛至  $\beta = 1.477$ ，失效概率  $P_f = 7.025\%$ ，计算共经过了11次迭代。同时，随步长系数的减小，本文方法与蒙特卡洛法间绝对误差和相对误差均逐渐减小，当  $\nu$  取值0.01时，两者间绝对误差为

表2 不同步长系数下隧道围岩开挖可靠度计算结果  
Table 2 Reliability evaluation of surrounding rock excavation by using difference-based SORM with different values of  $\nu$

步长系数	功能函数值/ $10^{-4}$	可靠指标	失效概率/%	与MC间误差	
				绝对误差/%	相对误差/%
0.100	-2.124	1.655	4.886	2.359	32.56
0.080	-1.877	1.624	5.219	2.026	27.96
0.050	-1.125	1.608	5.385	1.860	25.67
0.030	-0.927	1.507	6.687	0.558	7.71
0.010	0.227	1.477	7.025	0.220	3.03
0.005	0.227	1.477	7.025	0.220	3.03
0.003	0.227	1.477	7.025	0.220	3.03
0.001	0.227	1.477	7.025	0.220	3.03

0.220%，相对误差为3.03%，该计算精度在工程上是可以接受的。

### 4.3 隧道围岩锚喷衬砌稳定可靠度计算

对该隧道锚喷衬砌的稳定性进行确定性计算，隧道围岩有关参数均取均值，得到结果：围岩最小支护阻力  $p_{\min} = 0.466\text{ MPa}$ ，混凝土喷层支护阻力  $p_a = 0.368\text{ MPa}$ ，锚杆支护阻力  $p_i = 0.192\text{ MPa}$ ， $p_{\min} < p_a + p_i$ ，说明从常规隧道设计分析理论上，该隧道锚喷支护是能够满足工程稳定性要求的。考虑到隧道围岩所存在的天然不确定性特征，需要进一步从概率性方面对隧道的稳定性进行计算分析。

隧道围岩锚喷衬砌功能函数在  $x$ -空间可表示为  $Z = p_a + p_i - p_{\min} = g(\mathbf{X}) = g(c, \varphi, \gamma, E, \mu) = g(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ，相应地变换到  $u$ -空间为  $Z = G(\mathbf{Y}) = G(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$ 。

利用节3.4中SORM执行流程求解隧道围岩锚

表3 不同步长系数下隧道围岩锚喷衬砌可靠度计算结果  
Table 3 Reliability evaluation of shotcrete lining and rockbolts by using difference-based SORM with different values of  $\nu$

$\nu$	$n$	$G(\nu_i)$	$\beta$	$P_f/\%$
0.100	10	$9.875 \times 10^{-5}$	1.741 2	4.385
0.080	10	$8.258 \times 10^{-5}$	1.746 2	4.153
0.050	10	$6.981 \times 10^{-5}$	1.753 6	4.028
0.030	12	$3.735 \times 10^{-5}$	1.758 1	3.862
0.010	12	$-1.345 \times 10^{-5}$	1.764 3	3.741
0.005	12	$-1.345 \times 10^{-5}$	1.764 3	3.741
0.003	12	$-1.345 \times 10^{-5}$	1.764 3	3.741
0.001	12	$-1.345 \times 10^{-5}$	1.764 3	3.741

喷衬砌稳定可靠度，收敛误差 $\varepsilon$ 取 0.005。表 3 列出了不同步长系数下可靠度计算结果， $n$  为获得收敛点时的总迭代次数。

从表 3 可以看出，随步长系数在 0.1~0.001 范围内逐渐减小，可靠指标 $\beta$ 值逐渐增加， $\nu = 0.01$  时，结果收敛至 $\beta = 1.7643$ ，相应失效概率 $P_f = 3.741\%$ ， $x$ -空间内相应的失效验算点为(0.577 MPa, 33.25°, 27.321 kN/m<sup>3</sup>, 3.288 GPa, 0.284)，计算共需要 12 次迭代。

利用蒙特卡洛法对该结构可靠度进行模拟计算，模拟计算了 100 万次后计算结果趋于稳定，得到失效概率 $\hat{P}_f = 3.612\%$ 。本文近似方法与蒙特卡洛法计算对比结果如表 4 所示。

表 4 本文方法与蒙特卡洛法计算结果比较

Table 4 Comparison of between the results by the proposed method and Monte Carlo simulation method

计算方法	迭代计算次数 $n$	失效概率 $P_f/\%$
蒙特卡洛法	$1 \times 10^6$	3.612
本文方法 ( $\nu = 0.01$ )	12	3.741

本文方法和蒙特卡洛法计算结果间绝对误差： $|3.612\% - 3.741\%| = 0.129\%$ ；两者间相对误差： $|3.612\% - 3.741\%|/3.612\% \times 100\% = 3.57\%$ 。从以上对比结果可以看出，在确定了合适步长系数后，本文所提出的基于差分理论的 SORM 近似计算方法迭代次数较少、计算量适中，并且计算结果与“准精确解”间误差处于工程上可接受范围内，具有一定实用性。

基于以上计算分析，从确定性分析方面来看，该隧道开挖后的锚喷支护是满足工程稳定性要求的；但从概率性分析方面，该隧道锚喷支护后的失效概率仍达到 3.6% 以上，并且该计算结果尚未考虑时间效应、地震、降雨等不良地质灾害的影响，隧道存在极不利的安全风险隐患，需引起重视。

#### 4.4 步长系数问题

根据差分原理，在利用差分求解功能函数偏导数时，计算结果相对精确值的近似程度与步长具有很大关系(步长可用步长系数表示)。理论上，步长越小，计算精确度越高，但受限于计算工作量、累积误差及工程实际可行性等因素，步长不可能无限小。对于工程可靠度计算而言，只能从解决实际问题的需要出发，将目标确定为寻找对应于计算结果近似精确度可接受的步长值。

目前针对该问题，岩土工程领域相关专家学者

也花费了较大精力进行研究，并发布了相应结果，如 X. H. Tan 等<sup>[20]</sup>将步长取随机变量的均方差；J. Ji 和 K. K. Jayantha<sup>[21]</sup>得出步长可取随机变量均值的 1%，5%，10% 和 20% 等不同值；Y. H. Su 等<sup>[22]</sup>得出步长为求导点值的 8% 为合适。可以看出，不同研究者确定的步长值具有明显差异、无法统一，并且步长的取值均是基于各自特定研究对象，没有普遍意义和推广价值。

经过分析，认为出现上述步长取值的研究结果具有明显差异，从而不能普遍推广的原因在于：具体工程对象中随机变量的特征值差异太大(包括随机变量的分布形式、均值、方差、随机变量之间的相关性等方面)，而上述对步长的研究均是基于随机变量的  $x$ -空间，进而在建议可接受步长值的时候，完全没有考虑不同研究对象间随机变量的差异性，即没有从同一基准出发，导致各自确定的步长只能适用于其特定研究对象，而不能适用于其他对象，难以建立一个统一的标准。

本文基于以上分析，在基准空间  $u$ -空间内展开了对步长合适取值的讨论，该空间内，不同研究对象所涉及的随机变量均已通过一定的转换，变换成其标准独立正态形式，该策略消除了由于研究对象随机变量在原始空间内的差异性而带来的步长取值没有从同一基准出发，进而难以统一的问题，因而这样寻找到的步长系数是具普遍意义的，即在标准独立正态空间内对其余研究对象也同样适合。

因此，通过误差对比分析，本文建议将  $\nu = 0.01$  作为可靠度差分求解计算中标准独立正态空间内具有普遍意义的合适步长系数取值。

## 5 结 论

本文构建一种不受功能函数形式制约的 SORM 方法，研究了隧道开挖及锚喷衬砌稳定可靠度问题，具体研究成果如下：

(1) 基于隧道围岩收敛判定准则、薄壁筒理论及锚喷衬砌原理，建立隧道围岩开挖及锚喷衬砌功能函数表达式。

(2) 基于数值差分理论，构建梯度矢量求解新途径，结合 Breitung 理论，建立一种适用于任意形式功能函数的 SORM 计算方法。

(3) 在消除了不同研究对象随机变量间差异性的前提下，在  $u$ -空间内建议了具有普遍意义的合适步长系数  $\nu = 0.01$ ，较好地解决了可靠度差分求解中的步长取值问题。

**参考文献(References):**

- [1] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second moment code format[J]. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 1974, 100(1): 111 - 121.
- [2] BREITUNG K. Asymptotic approximation for multinormal integrals[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110(3): 357 - 366.
- [3] 中华人民共和国行业标准编写组. GB 50153—2008 工程结构可靠性设计统一标准[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.(The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. GB 50153—2008 Uniform standards for reliability design of engineering structures[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2008.(in Chinese))
- [4] 徐干成, 郑颖人, 乔春生, 等. 地下工程支护结构与设计[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2013: 121 - 123.(XU Gancheng, ZHENG Yingren, QIAO Chunsheng, et al. *Underground engineering support structure and design*[M]. Beijing: China Water Power Press, 2013: 121 - 123.(in Chinese))
- [5] 张道兵, 杨小礼, 朱川曲, 等. 基于最大熵原理与最优化方法的隧道衬砌结构可靠性分析[J]. *中南大学学报: 自然科学版*, 2012, 43(2): 663 - 668.(ZHANG Daobing, YANG Xiaoli, ZHU Chuanqu, et al. Structural reliability analysis of tunnel lining based on maximal entropy principle and optimization method[J]. *Journal of Central South University: Natural Science*, 2012, 43(2): 663 - 668.(in Chinese))
- [6] 苏永华, 李翔, 徐能雄, 等. 锚喷衬砌隧道结构稳定可靠性计算[J]. *土木工程学报*, 2011, 44(3): 113 - 119.(SU Yonghua, LI Xiang, XU Nengxiong, et al. Calculation of reliability for the structural stability of tunnel linings consisting of rockbolts and shotcrete[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2011, 44(3): 113 - 119.(in Chinese))
- [7] 祁长青, 许人平, 吴继敏, 等. 基于遗传算法的隧道围岩变形稳定可靠性分析[J]. *工程地质学报*, 2008, 16(2): 258 - 262.(QI Changqing, XU Renping, WU Jimin, et al. Reliability analysis of rock mass deformation in tunnel excavation based on genetic algorithm[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2008, 16(2): 258 - 262.(in Chinese))
- [8] LV Q, LOW B K. Probabilistic analysis of underground rock excavation using response surface method and SORM[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, 38(8): 1 008 - 1 021.
- [9] LV Q, CHAN C L, LOW B K. Probabilistic evaluation of ground-support interaction for deep rock excavation using artificial neural network and uniform design[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2012, 32: 1 - 18.
- [10] RABCEWICZ L V. The new Austrian tunnelling method[J]. *Water Power*, 1964, (1): 19 - 24.
- [11] ROUSSEV P. Calculation of the displacements and Pacher's rock pressure curve by the associative law for the fluidity plastic flow[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 1998, 13(4): 441 - 451.
- [12] 徐明新, 杨成永, 张强. 施工期隧道喷混凝土支护安全性评价[J]. *北京交通大学学报*, 2008, 32(1): 1 - 6.(XU Mingxin, YANG Chengyong, ZHANG Qiang. Assessment on the safety of shotcrete lining during tunnel construction[J]. *Journal of Beijing Jiaotong University*, 2008, 32(1): 1 - 6.(in Chinese))
- [13] HOEK E. Reliability of Hoek-Brown estimates of rock mass properties and their impact on design[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, 1998, 35(1): 63 - 68.
- [14] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1952, 23(3): 470 - 472.
- [15] HOHENBICHLER M, RACKWITZ R. Non-normal dependent vectors in structural safety[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1981, 107(6): 1 227 - 1 238.
- [16] 谭忠盛, 王梦恕. 隧道衬砌结构可靠性分析的二次二阶矩法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(13): 2 243 - 2 247.(TAN Zhongsheng, WANG Mengshu. Second-order second-moment method for structural reliability analysis of tunnel lining[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(13): 2 243 - 2 247.(in Chinese))
- [17] 黄靓, 易伟健, 汪优. 岩土工程可靠性分析的改进响应面法研究[J]. *岩土力学*, 2008, 29(2): 370 - 374.(HUANG Liang, YI Weijian, WANG You. Improvement study on response surface method for reliability analysis in geotechnical engineering[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(2): 370 - 374.(in Chinese))
- [18] 赵洪波, 茹忠亮, 张士科. SVM在地下工程可靠性分析中的应用[J]. *岩土力学*, 2009, 30(2): 526 - 530.(ZHAO Hongbo, RU Zhongliang, ZHANG Shike. Application of support vector machine to reliability analysis of underground engineering[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(2): 526 - 530.(in Chinese))
- [19] 苏雅, 杨明辉, 苏永华, 等. 深埋隧道衬砌稳定可靠度的Kriging插值法与遗传算法协同优化求解法[J]. *岩土力学*, 2013, 34(9): 2 661 - 2 666.(SU Ya, YANG Minghui, SU Yonghua, et al. Calculation for reliability of deep tunnel lining through optimization method of Kriging interpolation in collaboration with genetic algorithm[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(9): 2 661 - 2 666.(in Chinese))
- [20] TAN X H, WANG X E, HU N, et al. Two methods for predicting reliability index and critical probabilistic slip surface of soil slopes[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2016, 34(5): 1 283 - 1 292.
- [21] JI J, JAYANTHA K K. Efficient reliability method for implicit limit state surface with correlated non-Gaussian variables[J]. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2015, 39(17): 898 - 1 911.
- [22] SU Y H, LI X, XIE Z Y. Probabilistic evaluation for the implicit limit state function of stability of a highway tunnel in China[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2011, 26(2): 422 - 434.