中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

第八章

时滞系统稳定性分析

2015年10月25日

基本知识

- 时滞系统研究的重要性
- 稳定性分析的主要方法
  - 基于系统传递函数的频域法
  - 基于系统状态空间的时域法
- 稳定性条件
  - 时滞无关条件
  - 时滞相关条件

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞系统分类—时滞在状态方程中的位置

- 滞后型时滞系统

$$L1: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t))$$

- 中立型时滞系统

$$L2: \dot{x}(t) - C\dot{x}(t - d(t) = Ax(t)$$

- 分布型时滞系统

$$L3: \dot{x}(t) = Ax(t) + D\int_{t-d(t)}^{t} x(s)ds$$

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞系统分类—状态方程的系统矩阵

- 标称系统

$$\text{S1}: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t))$$

- 时变结构不确定系统

$$\text{S2}: \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(t))x(t - d(t))$$

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta A_d(t)\end{bmatrix} = DF(t)\begin{bmatrix}E_a & E_{ad}\end{bmatrix} \qquad F^T(t)F(t) \le I$$

- 多项式型不确定系统

S3: 对于系统S1中矩阵 A和 A_d满足如下约束：

$$\begin{bmatrix}A & A_d\end{bmatrix} \in \Omega,\ \Omega = \left\{\begin{bmatrix}A(\xi) & A_d(\xi)\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \xi_j \begin{bmatrix}A_j & A_{dj}\end{bmatrix}, \sum_{j=1}^{p} \xi_j = 1, \xi_j \ge 0\right\}$$

- 多时滞系统

$$\text{S4}: \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i)$$

时滞系统分类—时滞类型

- 定常时滞系统

D1: $d(t)$是一个恒定值，即

$$d(t) \equiv h$$

- 时变时滞系统

D2: $d(t)$是一个可微函数，且满足

$$0 \le d(t) \le h,\ \dot{d}(t) \le \mu \le \infty$$

其中，当 $\mu \ge 1$ 时，称为快变时滞；当 $\mu < 1$ 时，称为慢变时滞。

D3: $d(t)$是一个连续函数，且满足

$$0 \le d(t) \le h$$

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

常用不等式

- 基本不等式

$$2a^T b \le a^T R a + b^T R^{-1} b, R > 0$$

- Park不等式

$$-2a^T b \le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & RM \\ M^T R & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$Z = (M^T R + I) R^{-1} (RM + I)$$

- Moon不等式

$$-2a^T N b \le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge 0$$

时滞无关稳定性分析-频域分析方法

频域方法是一类通过系统特征根分布进行分析来判断系统稳定性的方法，由于它涉及特征根，因而无法处理具有时变时滞或不确定性的时滞系统。

$$\mathrm{S1}: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \quad D1: d(t) \equiv h$$

定理1 满足时滞约束D1的系统S1时滞无关稳定的充分与必要条件是如下三个条件同时满足：

a) A 是稳定的；

b) $A + A_d$ 是稳定的；

c)对于任意的$\omega > 0$，矩阵$(j\omega I - A)^{-1} A_d$ 的谱半径满足

$$\rho\left((j\omega I - A)^{-1} A_d\right) < 1$$

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞无关稳定性分析-拉什密辛函数方法

选取如下形式的Lyapunov函数，利用拉什密辛稳定性定理，可以得到相应的时滞无关稳定性条件。

$$V(t, x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

定理2 如果存在标量 $\alpha > 0$ 和对称矩阵 $P = P^T > 0$ ，使得如下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \alpha P & PA_d \\ * & -\alpha P \end{bmatrix} < 0$$

那么系统S1是渐近稳定的。

上述定理中的条件是非线性的，可以按照如下思路求解：

- 给定 α 将它转化为LMI
- 利用LMI工具箱判断它的可行性

时滞无关稳定性分析-Lyapunov-Krasovskii泛函方法

选取如下形式的Lyapunov函数，利用Lyapunov-Krasovskii稳定性定理，可以得到相应的时滞无关稳定性条件。

$$V(t,x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x^T(s)Qx(s)ds$$

定理3 如果存在对称矩阵$P = P^T > 0$，$Q = Q^T > 0$，使得如下LMI成立：

$$\Pi = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_d \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

那么满足时滞约束D1的系统S1是渐近稳定的。

时滞相关稳定性分析-频域分析方法

频域方法讨论系统的时滞相关稳定性问题，主要根据系统的稳定性指数连续性和系统特征虚根信息来确定保证系统稳定的时滞范围。对于矩阵对 (X,Y)，将它的第 i 个广义特征值表示为 $\lambda_i(X,Y)$ ，并定义

$$\underline{\rho}(X,Y) = \min\left\{|\lambda| : \det(X - \lambda Y) = 0\right\}$$

$$\text{S1}: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) \qquad D1: d(t) \equiv h$$

定理4 假设当 $h = 0$ 时系统S1是稳定的，令 $\operatorname{rank}(A_d) = q$，并定义

$$\bar{h}_i = \begin{cases} \min\limits_{1\le k\le n} \dfrac{\theta_k^i}{\omega_k^i}, 若 \lambda_i(j\omega_k^i I - A, A_d) = e^{-j\theta_k^i}, \exists \omega_k^i \in (0,\infty), \exists \theta_k^i \in [0, 2\pi] \\ \infty, 若\ \underline{\rho}(j\omega I - A, A_d) > 1, \forall \omega \in (0,\infty) \end{cases}$$

则有 $\bar{h} = \min\limits_{1\le i\le q} \bar{h}_i$，也就是说，系统S1对于所有 $h \in [0, \bar{h})$ 是稳定的，但在 $h = \bar{h}$ 时开始不稳定。

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-拉什密辛函数方法(1)

➢ 显式模型变换方法

对于满足时滞约束D1的系统S1，根据牛顿莱布尼茨公式，有

$$S1: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) \qquad D1: d(t) \equiv h$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = [A + A_d]x(t) - A_d \int_{-h}^{0} [Ax(t+s) + A_d x(t-h+s)]ds$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = [A + A_d]x(t) - \int_{-h}^{0} A_d Ax(t+s)ds - \int_{-2h}^{-h} A_d A_d x(t+s)]ds$$

选取如下形式的Lyapunov函数，从而对于充分小的正数ε，有$V(t,x(t)) \geq \varepsilon \|x(t)\|^2$，从而可得相应时滞相关稳定性条件

$$V(t,x(t)) = x^T(t)Px(t)$$

时滞相关稳定性分析-拉什密辛函数方法(2)

定理5 给定标量 $h>0$，如果存在标量 $\alpha_0>0$，$\alpha_1>0$ 和对称矩阵 $P=P^T>0$，使得如下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h}[P(A+A_d)+(A+A_d)^T P]+(\alpha_0+\alpha_1)P & -PA_dA & -PA_dA_d \\ * & -\alpha_0 P & 0 \\ * & * & -\alpha_1 P \end{bmatrix}<0$$

那么满足时滞约束D1的系统S1是渐近稳定的。

上述定理中的条件是非线性的，可以按照如下思路求解：

- 给定 α_0 和 α_1 将它转化为LMI；
- 利用LMI工具箱判断它的可行性.

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-拉什密辛函数方法(3)

隐式模型变换方法

$$S1: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) \quad D1: d(t) \equiv h$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t+\theta) = Ax(t+\theta) + A_d x(t - h + \theta)$$

定理6 给定标量 $h > 0$，如果存在标量 $\alpha > 0$，$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ 和对称矩阵 $P = P^T > 0$ 和任意合适位数矩阵 Y，使得如下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h}(PA + A^T P + Y + Y^T) + (\frac{\alpha}{h} + \alpha_0 + \alpha_1)P & -YA & -YA_d & \frac{1}{h}(PA_d - Y) \\ * & -\alpha_0 P & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha_1 P & 0 \\ * & * & * & -\frac{\alpha}{h}P \end{bmatrix} < 0$$

那么满足时滞约束D1的系统S1是渐近稳定的。

时滞相关稳定性分析-拉什密辛函数方法(4)

➢ 注：

- 如果设$Y = 0, \alpha_0 = \varepsilon_0 I, \alpha_1 = \varepsilon_1 I$，那么定理6可转化为定理2，即该定理包括了时滞无关稳定条件；
- 如果设$Y = PA_d, \alpha = \varepsilon_2 I$，那么定理6可转化为定理5，即该定理包括了显式模型变换方法的结论；
- 基于拉什密辛函数的稳定性分析方法还可以处理具有时变时滞或者不确定性的时滞系统；
- 缺陷：得到的结论都不是LMI形式的，需要对某些参数进行设置，这不仅增加了结论的保守性，而且增加了计算的复杂性。

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(1)

- 模型变换结合交叉项界定技术

基本思路：引入模型变换将系统中的离散时滞变换为分布时滞（即积分项），使得泛函沿系统的导数中同时出现交叉项（变换系统产生）和二次型积分项（泛函产生），利用不等式对交叉项进行界定可抵消泛函导数中的所有积分项，从而获得时滞相关条件。

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(2)

- 模型变换 I （一阶模型变换）

$$\dot{x}(t) = [A + A_d]x(t) - A_d \int_{t-h}^{t} [Ax(s) + A_d x(s-h)]ds$$

- 模型变换 II （中立型模型变换）

$$\frac{d}{dt}[x(t) + A_d \int_{t-h}^{t} x(s)]ds = (A + A_d)x(t)$$

局限性：

- 有附加特征值，与原系统不等价；
- 使用基本不等式有很大的保守性。

Kolmanovskii , *IEEE-TAC* 1999, *IJC* 1999, Kim *IEEE-TAC* 2001

Gu, *IEEE-TAC* 2000, 2001

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(3)

- 模型变换III

Park & Moon : $\dot{x}(t) = [A + A_d]x(t) - A_d \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s)ds$

- 模型变换IV（广义模型变换or描述式模型变换）

Fridman : $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ y(t) = [A + A_d]x(t) - A_d \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s)ds \end{cases}$

特点：

- 与原系统等价；
- 使用了Park和Moon的不等式

Park, *IEEE-TAC* 1999, Moon, *IJC* 2001
Fridman, *SCL* 2001, *IEEE-TAC*, 2002a,b, *IJC* 2003

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(4)

模型变换III结合Moon不等式得到的时滞相关/时滞变化率相关稳定条件。

定理7 给定标量$h>0$和 $\mu<1$，如果存在$P=P^T>0$, $Q=Q^T>0$和$Z=Z^T>0$，以及任意合适维数矩阵 X和 Y，使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} PA+A^TP+Q+hX+Y+Y^T & PA_d-Y & hA^TZ \\ * & -(1-\mu)Q & hA_d^TZ \\ * & * & -hZ \end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix}\ge 0$$

则满足时滞D2的系统S1是渐近稳定的。

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(5)

模型变换IV结合Moon不等式得到的时滞相关/时滞变化率相关稳定条件 。

定理8 给定标量$h>0$和$\mu<1$，如果存在$P_1=P_1^T>0$ ，$Q=Q^T>0$，$Z=Z^T>0$和 $R>0$，以及任意合适维数矩阵P_2, P_3和$Y=\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\end{bmatrix}$，使得如下的LMI成立，

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12} & P_2^T A_d - Y_1^T \\ * & \Xi_{22} & P_3^T A_d - Y_2^T \\ * & * & -(1-\mu)Q\end{bmatrix}<0 \qquad \begin{bmatrix}Z & Y \\ * & R\end{bmatrix}\geq 0$$

其中

$$\Xi_{11}=Q+Y_1+Y_1^T+A^T P_2+P_2^T A+hR_{11}$$

$$\Xi_{12}=P_1+Y_2-P_2^T+A^T P_3+hR_{12} \quad \Xi_{22}=hZ-P_3-P_3^T+hR_{22}$$

则满足时滞D2的系统S1是渐近稳定的。

时滞相关稳定性分析-确定模型变换方法(6)

局限性：

- 由于交叉项界定时不可避免的放大处理，而且更重要的是他们仅仅利用固定权矩阵表示牛顿—莱布尼兹公式中各项的关系，使结论具有保守性
- 对于时变时滞系统（时滞变化率大于1），模型变换III不能处理。即使广义模型变换方法能处理这种情形，也只是通过一些特定的约束来获得结果，不具有通用性

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(1)

确定模型变换方法本质上他们都是用 $x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds$ 替换 $x(t-h)$ 。比如，在Moon(IJC,2001)中，对于下式 $\dot{x}(t)$ 中的 $x(t-h)$ 前面被替换，而后面的没有替换。

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t)+\cdots+h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)+\cdots \\
&= 2x^T(t)P\left[Ax(t)+A_d x(t-h)\right]+\cdots+h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)+\cdots \\
&= 2x^T(t)P\left[Ax(t)+A_d x(t)-A_d\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds\right]+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\text{相当于}: \underline{2x^T(t)PA_d\left[x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds-x(t-h)\right]=0}\text{加入}\dot{V}(x_t)
$$

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(2)

$$2x^T(t)PA_d\left[x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds-x(t-h)\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[x^T(t)N_1+x^T(t-h)N_2\right]\left[x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds\right]=0$$

- 将上式加入到Lyapunov泛函的导数，保留所有的$x(t-h)$项。由于N_1和N_2可以利用LMI求解，相比于以前采用替换$x(t-h)$的利用固定的权的方法，我们的方法具有更大的优越性。

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(3)

对系统S1，构造Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T Px + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\theta$$

计算其导数，并对于$\dot{x}(t)$ 这一项，有两种处理方式：

- 利用系统方程替换$\dot{x}(t)$
- 保留 $\dot{x}(t)$，并利用自由权矩阵表示系统方程各项的关系。

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(4)

替换 $\dot{x}(t)$:

计算Lyapunov泛函的导数，利用系统方程 (1)替换 $\dot{x}(t)$ ，并将下式加入Lyapunov泛函的导数中：

$$\left[x^T(t)N_1 + x^T(t-d(t))N_2\right]\left[x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s)ds\right] = 0$$

得到结果:

- 理论上包含Moon(2001,IJC)的结果；
- 理论上包含时滞无关稳定条件；
- 实例比较好于Fridman(2002,IEEE-TAC; 2003, IJC)的结果。

Wu et al, *Automatica* 2004

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(5)

定理9 给定标量$h>0$和μ，如果存在$P=P^T>0$, $Q=Q^T\geq 0$, $Z=Z^T>0$, $X\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵N_1和N_2，使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & hA^T Z \\ * & \Phi_{22} & hA_d^T Z \\ * & * & -hZ \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & N_1 \\ * & X_{22} & N_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0,$$

则满足时滞条件D2 的系统S1是渐近稳定的。这里

$$\Phi_{11} = PA + A^T P + Q + N_1 + N_1^T + hX_{11},$$

$$\Phi_{12} = PA_d - N_1 + N_2^T + hX_{12},$$

$$\Phi_{22} = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T + hX_{22}.$$

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(6)

保留 $\dot{x}(t)$ ：

计算Lyapunov泛函的导数，保留 $\dot{x}(t)$ ，而利用自由权矩阵表示系统方程(1)各项关系，将下式加入Lyapunov泛函的导数中：

$$\left[x^T(t)T_1 + \dot{x}^T(t)T_2\right]\left[\dot{x}(t) - Ax(t) - A_d x(t-d(t))\right] = 0$$

$$\left[x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2 + x^T(t-d(t))N_3\right]\left[x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right] = 0$$

得到结果

- 理论上包含Fridman(2002)的结果；
- 与替换 $\dot{x}(t)$ 的结果是等价的；
- 方便处理参数依赖Lyapunov泛函。

He et al, *IEEE-TAC* 2004

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-自由权矩阵方法(7)

定理10 给定标量$h>0$和μ，如果存在$P=P^T>0$, $Q=Q^T\geq 0$, $Z=Z^T>0$, $X\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵N_1,N_2,N_3和T_1,T_2使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ * & * & \Gamma_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & N_1 \\ * & X_{22} & X_{23} & N_2 \\ * & * & X_{33} & N_3 \\ * & * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0,$$

则满足时滞条件D2 的系统S1是渐近稳定的。这里

$$\Gamma_{11}=Q+N_1+N_1^T-A^TT_1^T-T_1A+hX_{11},\quad \Gamma_{12}=P+N_2^T+T_1-A^TT_2^T+hX_{12},$$

$$\Gamma_{13}=N_3^T-N_1-T_1A_d+hX_{13},\quad \Gamma_{22}=hZ+T_2+T_2^T+hX_{22},$$

$$\Gamma_{23}=-N_2-T_2A_d+hX_{23},\quad \Gamma_{33}=-(1-\mu)Q-N_3-N_3^T+hX_{33}.$$

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(1)

保留有用项：

仍然考虑系统S1在时滞条件D2下的稳定性，构造相同Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T Px + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\theta$$

其最后一项的导数为：

$$h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$$

$$= h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds - \underline{\int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds}$$

而以前的做法是将其放大为：

$$h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$$

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(2)

针对刚才提到的局限性，我们构造如下的Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T P x + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s) Q x(s) ds + \int_{t-h}^{t} x^T(s) R x(s) ds$$
$$+ \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)(Z_1 + Z_2)\dot{x}(s) ds d\theta$$

同时在求其导数时，将被忽略的一项保留下来，可以得到一个新的关于时变时滞系统的稳定性定理。可以证明，理论上此结论包含定理9的结果。

He et al, *IEEE-TAC 2007, Automatica* 2007

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(3)

定理11 给定标量$h>0$和μ，如果存在$P=P^T>0$, $Q=Q^T\geq 0$, $R=R^T\geq 0$, $Z_1=Z_1^T>0, Z_2=Z_2^T\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵N,S和M，使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} \Phi & hN & hS & hM & hA_{cl}^T \\ * & -hZ_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -hZ_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -hZ_2 & 0 \\ * & * & * & * & -h(Z_1+Z_2) \end{bmatrix} < 0,$$

则满足时滞条件D2 的标称系统S1是渐近稳定的。这里

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_2^T, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + R & PA_d & 0 \\ * & -(1-\mu)Q & 0 \\ * & * & -R \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} N+M & S-N & -M-S \end{bmatrix}.$$

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(4)

考虑时滞、时滞上界和它们之差的关系:

$$0 \le h\zeta^T(t)NZ^{-1}N^T\zeta(t) - \int_{t-d(t)}^{t} \zeta^T(t)NZ^{-1}N^T\zeta(t)ds$$

$$0 \le h\zeta^T(t)MZ^{-1}M^T\zeta(t) - \int_{t-h}^{t-d(t)} \zeta^T(t)MZ^{-1}M^T\zeta(t)ds$$

$$\Downarrow$$

$$d(t) \le h$$

$$h - d(t) \le h$$

$$\Downarrow$$

$$h = [h - d(t)] + d(t) \le 2h$$

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(5)

在Lyapunov泛函的导数中利用如下恒等关系：

$$h\eta^T(t)X\eta(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\eta^T(t)X\eta(t)ds-\int_{t-h}^{t-d(t)}\eta^T(t)X\eta(t)ds=0$$

在处理的过程中充分的考虑了$h, d(t)$和$h-d(t)$三者之间的关系，将h分解成$h-d(t)$和$d(t)$，不做任何的放大，且没有忽略任何的有用项。

He et al, *IEEE-TNN* 2007, *IET-CTA*, 2007, *IEEE-TAC* 2008

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析-改进型自由权矩阵方法(6)

定理12 给定标量$h>0$和μ，如果存在$P=P^T>0$, $Q=Q^T\geq 0$, $R=R^T\geq 0$, $Z=Z^T>0$,$X=X^T>0$ 以及任意合适维数的矩阵N,S和M，使得如下的LMI成立

$$\begin{bmatrix} \Phi & hA_{c1}^T Z \\ * & -hZ \end{bmatrix} < 0 \qquad \begin{bmatrix} X & N \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} X & S \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$$

则满足时滞条件D2 的标称系统S1是渐近稳定的。这里

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_2^T + hX$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + R & PA_d & 0 \\ * & -(1-\mu)Q & 0 \\ * & * & -R \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} N & -N+S & -S \end{bmatrix} \qquad A_{c1} = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 \end{bmatrix}$$

时滞相关稳定性分析-积分不等式方法

常用的积分不等式有两类：

- $$-\int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \le \xi^T(t)\begin{bmatrix} M_1^T+M_1 & -M_1^T+M_2 \\ * & -M_2^T-M_2 \end{bmatrix}\xi(t)+h\xi^T(t)Z\xi(t).$$
- $$-h\int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \le \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R & R \\ * & -R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

➢ 无需模型变换和交叉项界定，避免了由此产生的保守性

➢ 对于具有时变时滞的系统，一般要引入新的不等式来获得具有更低保守性的结果，不够直观

Zhang, *Automatica* 2005
Han, *Automatica* 2005; Gu 2003

鲁棒稳定性分析(1)

- 时变结构不确定系统

引理1 给定具有适当维数的矩阵 $Q=Q^T$, H, E ,则

$$Q+HF(t)E+E^TF^T(t)H^T<0$$

对所有满足 $F^T(t)F(t)\le I$ 的 $F(t)$ 都成立的充要条件是存在一正数 $\varepsilon>0$ 使得下式成立

$$Q+\varepsilon^{-1}HH^T+\varepsilon E^TE<0$$

利用这个条件可以将标称系统的结论平行推广到具有时变结构不确定系统的时滞系统。以定理9为例，简述这种推广的思路:利用 $A+DF(t)E_a$ 和 $A_d+DF(t)E_{ad}$ 分别替换定理中A和 A_d，根据引理1，并应用Schur补，可以得到相应的时滞相关/时滞变化率相关鲁棒稳定条件。

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

鲁棒稳定性分析(2)

➢ 多项式型不确定系统

考虑系统矩阵具有凸多项式不确定性：

$$[A \quad A_d] \in \Omega = \left\{ [A(\xi) \quad A_d(\xi)] = \sum_{j=1}^{p} \xi_j [A_j \quad A_{dj}], \sum_{j=1}^{p} \xi_j = 1, \xi_j \geq 0 \right\} \quad (3)$$

简单Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T P x + \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q x(s) ds + \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta$$

参数依赖Lyapunov泛函：

$$V_u(x_t) = x^T P(\xi) x + \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q(\xi) x(s) ds + \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z(\xi) \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j P_j, Q(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j Q_j, Z(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j Z_j,$$

鲁棒稳定性分析(3)

$$\left[x^T(t)T_1 + \dot{x}^T(t)T_2\right]\times\left[\dot{x}(t) - Ax(t) - A_d x(t-d(t))\right] = 0$$

由于这个式子加入到Lyapunov泛函的导数中，而保留其中所有的 $\dot{x}(t)$ 项。这样，不会出现P,Q,Z与A,A_d的乘积，Lyapunov泛函的导数可以直接表示为：

$$\dot{V}(x_t) \le \sum_{j=1}^{p}\eta^T(t)\xi_j\bar{\Xi}_j\eta(t) - \sum_{j=1}^{p}\int_{t-d(t)}^{t}\zeta^T(t,s)\xi_j\overline{\Psi}^{(j)}\zeta(t,s)ds$$

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

鲁棒稳定性分析(4)

定理13 给定标量$h>0$和μ，如果存在$P_j=P_j^T>0$, $Q_j=Q_j^T\geq 0$, $Z_j=Z_j^T\geq 0$, $X_j\geq 0$ $(j=1,\ldots,p)$ 以及任意合适维数的矩阵N_{1j}, N_{2j}, N_{3j} $(i=1,2,3; j=1,\ldots,p)$和T_1, T_2使得如下的LMI成立，

$$\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{11} & \tilde{\Gamma}_{12} & \tilde{\Gamma}_{13}\\ * & \tilde{\Gamma}_{22} & \tilde{\Gamma}_{23}\\ * & * & \tilde{\Gamma}_{33}\end{bmatrix}<0 \quad \tilde{\Psi}^{(j)}=\begin{bmatrix}X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} & X_{13}^{(j)} & N_{1j}\\ * & X_{22}^{(j)} & X_{23}^{(j)} & N_{2j}\\ * & * & X_{33}^{(j)} & N_{3j}\\ * & * & * & Z_j\end{bmatrix}\geq 0$$

则满足时滞条件D2且具有多项式不确定性(3)的系统S1是鲁棒稳定的。这里

$$\tilde{\Gamma}_{(11)}^{(j)}=Q_j+N_{1j}+N_{1j}^T-A_j^T T_1^T-T_1A_j+hX_{11}^{(j)} \quad \tilde{\Gamma}_{22}^{(j)}=hZ_j+T_2+T_2^T+hX_{22}^{(j)}$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^{(j)}=P_j+N_{2j}^T+T_1-A_j^T T_2^T+hX_{12}^{(j)} \qquad \tilde{\Gamma}_{23}^{(j)}=-N_{2j}-T_2A_{dj}+hX_{23}^{(j)}$$

$$\tilde{\Gamma}_{13}^{(j)}=N_{3j}^T-N_{1j}-T_1A_{dj}+hX_{13}^{(j)} \qquad \tilde{\Gamma}_{33}^{(j)}=-(1-\mu)Q_j-N_{3j}-N_{3j}^T+hX_{33}^{(j)}$$

问题和展望

- 时滞系统稳定性分析方面
  - 如何选取既简单易行的Lyapunov-Krasovskii泛函，使得所得到的条件充分接近充分必要条件是未来的研究方向
  - 针对Lyapunov-Krasovskii泛函导数的处理过程，主要在于尽可能合理地对时变时滞导数的估计，即尽量减小放大幅度
- 时滞系统应用研究

针对网络控制系统、无线通讯网络、无线传感器网络、大型电力系 统网络和生物基因网络等网络，各种信息的获取、传输和处理都会存在时滞现象。因此，分析并消除时滞对系统的稳定性和动态性能的影响是值得关注的问题 .

中国地质大学 自动化学院 何 勇
School of Automation, China University of Geosciences

谢谢各位！

Thank you!