



第九章

时滞系统镇定与 H_∞ 控制

镇定控制器设计-问题描述(1)

- 考虑如下具有时滞的线性控制系统

$$S1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t), & t > 0 \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

- 无记忆状态反馈控制器

$$K1: u(t) = Kx(t)$$

- 动态输出反馈控制器

$$K2: \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_k \xi(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k \xi(t) + D_k y(t) \end{cases}$$

镇定控制器设计-问题描述 (2)

► 时滞类型

- $D1$: $d(t)$ 是一个恒定值, 即

$$d(t) \equiv h$$

- $D2$: $d(t)$ 是一个可微函数, 且满足

$$0 \leq d(t) \leq h, \dot{d}(t) \leq \mu \leq \infty$$

其中, 当 $\mu \geq 1$ 时, 称为快变时滞; 当 $\mu < 1$ 时, 称为慢变时滞。

- $D3$: $d(t)$ 是一个连续函数, 且满足

$$0 \leq d(t) \leq h$$

时滞无关镇定控制器设计(1)

➤ 状态反馈控制

$$S1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t), & t > 0 \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases}$$



$$K1: u(t) = Kx(t)$$

$$S2: \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t-d(t))$$

用 $A + BK$ 代替定理8.6中的 A ，可以得到 $S2$ 闭环系统的时滞无关稳定条件。

时滞无关镇定控制器设计(2)

➤ 输出反馈控制

$$S1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t), & t > 0 \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

$$K2: \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_k \xi(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k \xi(t) + D_k y(t) \end{cases}$$



$$S3: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{A}_d \bar{x}(t-d(t))$$

其中,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A + BD_k C & BC_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对上述系统, 应用定理8.6, 容易得到闭环系统S3的时滞无关稳定条件。

NLMI

时滞相关镇定控制器设计(1)

➤ 状态反馈控制

$$S1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t), & t > 0 \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

$$K1: u(t) = Kx(t)$$



$$S2: \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t-d(t))$$

用 $A + BK$ 代替定理8.15中的 A ，可以得到如下所述的闭环系统 $S2$ 的时滞相关稳定条件。

时滞相关镇定控制器设计(2)

闭环系统稳定条件:

定理1 给定标量 $h>0$ 和 μ , 如果存在 $P=P^T>0$, $Q=Q^T\geq 0$, $Z=Z^T>0$, $X\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵 N_1 和 N_2 , 使得如下的LMI成立,

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & N_1 \\ * & X_{22} & N_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & h(A+BK)^T Z \\ * & \Phi_{22} & hA_d^T Z \\ * & * & -hZ \end{bmatrix} < 0$$

其中,

$$\Phi_{11} = P(A+BK) + (A+BK)^T P + N_1 + N_1^T + Q + hX_{11},$$

$$\Phi_{12} = PA_d - N_1 + N_2^T + hX_{12},$$

$$\Phi_{22} = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T + hX_{22}.$$

那么满足时滞条件D2 的闭环系统S2是渐近稳定的。

时滞相关镇定控制器设计(3)

镇定控制器设计条件:

定理2 给定标量 $h>0$ 和 μ , 如果存在 $L=L^T>0$, $W=W^T>0$, $R=R^T>0$ 和 $Y \geq 0$, 以及任意合适维数矩阵 M_1, M_2 和 V , 使得如下矩阵不等式成立,

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & h(LA^T + V^T B^T) \\ * & \Pi_{22} & hLA_d^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < 0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & LR^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

其中,

$$\Pi_{11} = LA^T + AL + BV + V^T B^T + M_1 + M_1^T + W + hY_{11}$$

$$\Pi_{12} = A_d L - M_1 + M_2^T + hY_{12} \quad \Pi_{22} = -M_2 - M_2^T - (1-\mu)W + hY_{22}$$

那么满足时滞约束 $D2$ 闭环系统 $S2$ 通过控制器 $K1$ 可以镇定, 且控制器增益为 $K = VL^{-1}$ 。

时滞相关镇定控制器设计(4)

➤ 不等式变换方法

$$L = L^T > 0, R = R^T > 0 \quad \Rightarrow \quad (L - R)R^{-1}(L - R) \geq 0$$



$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & LR^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0$$



$$LR^{-1}L > 2L - R$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & 2L - R \end{bmatrix} \geq 0$$

新的LMI形式的条件是原NLMI条件的充分条件，保守性大，尤其是 L 和 R 相差较大时。

时滞相关镇定控制器设计(5)

► 参数调整方法

$$R = \varepsilon L$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & LR^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & h(LA^T + V^T B^T) \\ * & \Pi_{22} & hLA_d^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < 0$$



$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & \varepsilon^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & h(LA^T + V^T B^T) \\ * & \Pi_{22} & hLA_d^T \\ * & * & -h\varepsilon L \end{bmatrix} < 0$$

- 处理方便
- 需要人为利用经验调整参数，只能获得次优解
- 很多情况下获得的控制器增益比较大，难于实现

时滞相关镇定控制器设计(6)

➤ 非线性最小化问题迭代方法

步骤：引入一些满足条件的矩阵变量，将求解NLMI问题转化为基于LMI的非线性最小化问题；利用一些算法求解该问题从而获得控制器增益，这里主要有CCL算法与ICCL算法。

定义新的正定矩阵变量 J ，使得 $LR^{-1}L \geq J$ ，则式(2)可以用以下条件代替：

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & J \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3)$$

$$LR^{-1}L \geq J \quad (4)$$

时滞相关镇定控制器设计(7)

令 $J_1 = J^{-1}$, $L_1 = L^{-1}$, $R_1 = R^{-1}$, 则定理2给出的控制器设计问题, 可转化成如下的基于LMI的非线性最小化问题:

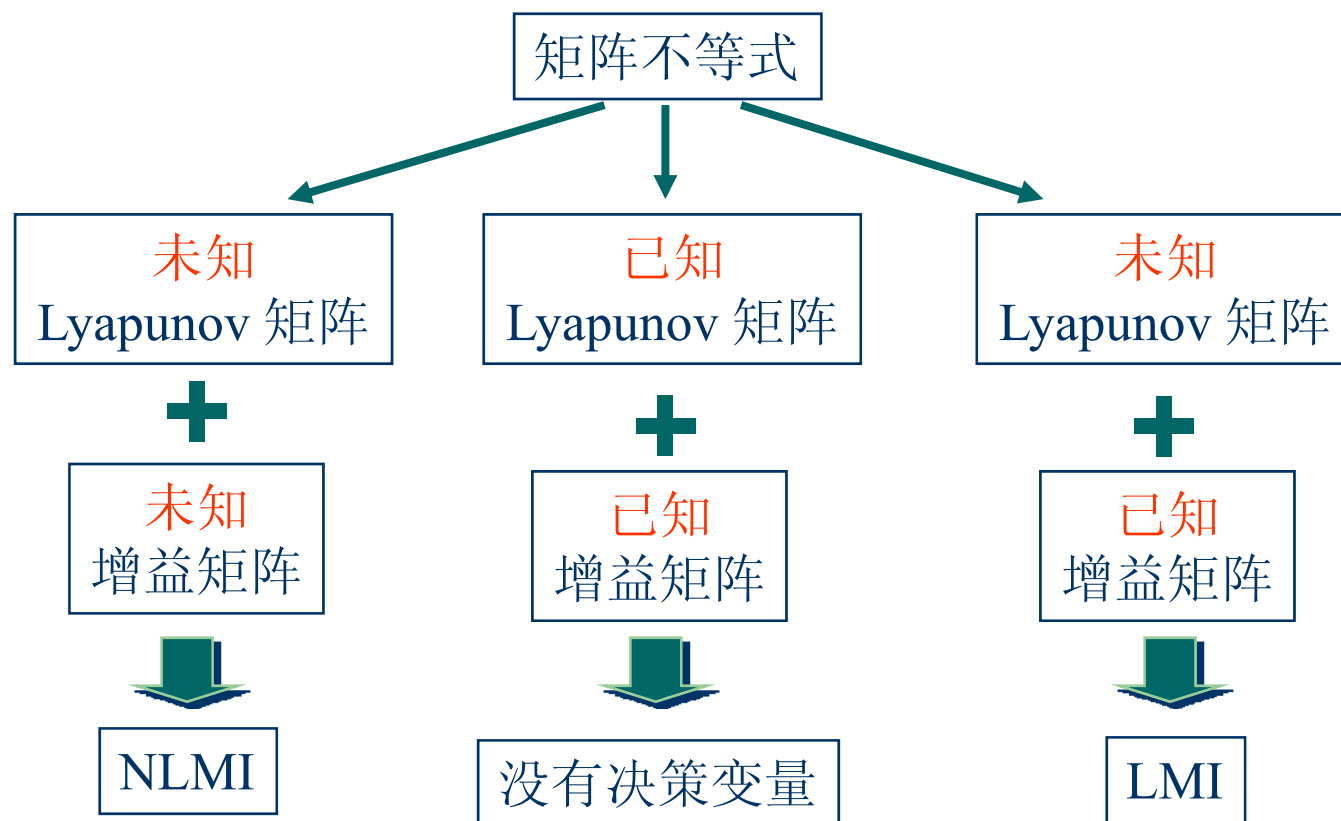
$$\text{Minimize} \quad \text{Tr}(JJ_1 + LL_1 + RR_1)$$

Subject to (1) 和

$$\left. \begin{aligned} &L > 0, J > 0, \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & M_1 \\ * & Y_{22} & M_2 \\ * & * & J \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\begin{bmatrix} J_1 & L_1 \\ L_1 & R_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} J & I \\ I & J_1 \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\begin{bmatrix} L & I \\ I & L_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} R & I \\ I & R_1 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

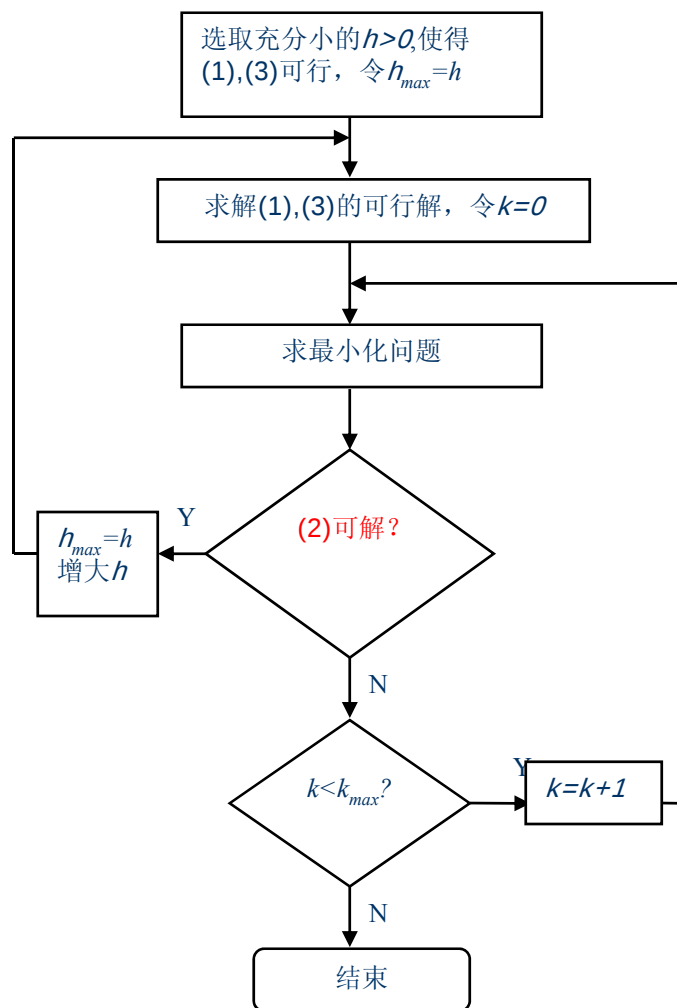
时滞相关镇定控制器设计(8)

CCL算法的迭代终止条件:

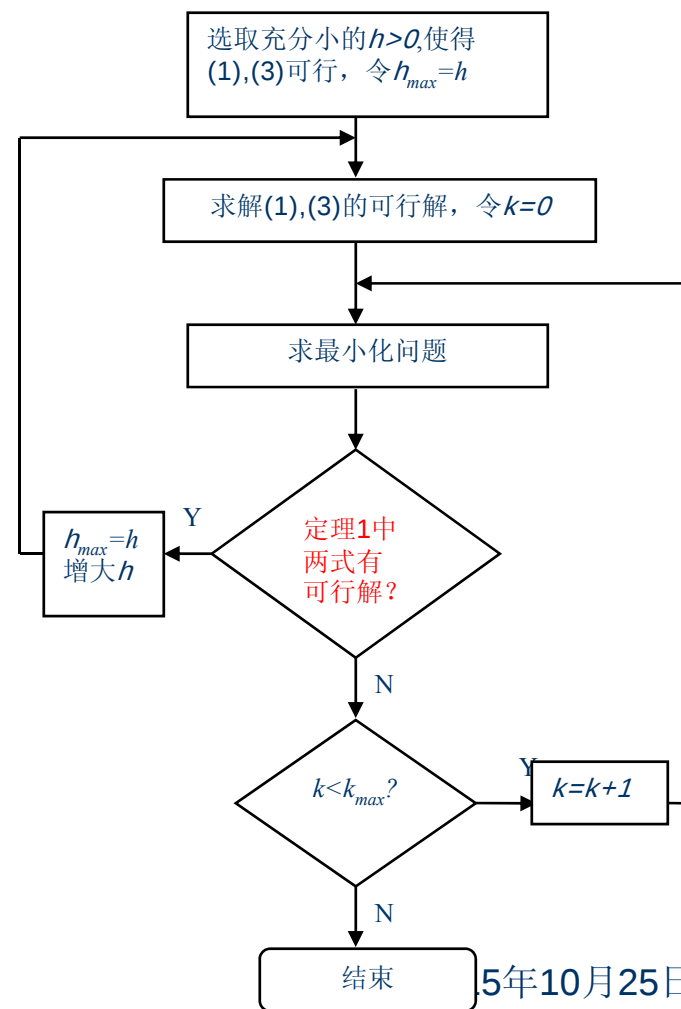


时滞相关镇定控制器设计(9)

CCL算法



ICCL算法



时滞相关镇定控制器设计(10)

CCL算法与ICCL算法的特点及区别:

- 所获得的控制器增益不大，容易实现
- 只能获得次优解
- CCL算法迭代终止条件苛刻，容易产生不必要的计算负担，ICCL算法在CCL算法基础上对迭代终止条件进行改进，迭代次数大大减少

时滞相关镇定控制器设计(11)

➤ 完全LMI方法

令定理8.6中的 $Q=0$ ，经过矩阵变换，可以得到如下完全基于LMI的时滞相关/时滞变化率无关镇定的条件，不必调整任何参数和进行迭代处理。

定理3 给定标量 $h>0$ ，如果存在 $L=L^T>0$ ， $R=R^T>0$ 和 $Y \geq 0$ ，以及任意合适维数矩阵 M_1 ， M_2 和 V ，使得如下LMI成立

$$\begin{bmatrix} S + S^T + hY_{11} & A_d M_2 + L - M_1^T + hY_{12} & hS^T \\ * & -M_2 - M_2^T + hY_{22} & hM_2^T A_d^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < 0$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ * & Y_{22} - R \end{bmatrix} \geq 0$$

则满足时滞约束D3的标称系统S1通过控制器K1可以镇定，并且控制器为 $u(t) = VL^{-1}x(t)$ ，这里 $S = AL + A_d M_1 + BV$

H_∞ 性能分析

➤ H_∞ 性能问题

$$S4: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_w w(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

定义：如果系统S4满足如下条件：

- a) 当 $w(t) = 0$ 时，系统S4是渐近稳定的；
- b) 对于任意非零的 $w(t) \in L_2[0, +\infty)$ 和给定常数 $\gamma > 0$ ，在零初始条件 $x(t) = 0 (t \in [-h, 0])$ 下，扰动输入 $w(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的 H_∞ 范数满足

$$\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$$

那么就称系统S4具有 H_∞ 性能 γ 。

时滞无关有界实条件

类似于基于Lyapunov-Krasovskii泛函方法的时滞无关稳定性分析，可以得到如下系统S4具有 H_∞ 性能 γ 的时滞无关条件。

定理4 给定标量 $\gamma > 0$ ，如果存在 $P = P^T > 0$ 和 $Q = Q^T \geq 0$ ，使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_d & PB_w & C^T \\ * & -Q & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & D^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

则满足时滞条件D1 的闭环系统S4具有 H_∞ 性能 γ 。

时滞相关有界实条件

类似于基于时域的时滞无关稳定性分析，用以下方法都可以获得系统 S_4 相应的具有 H_∞ 性能 γ 的时滞相关条件。

模型变换III结合Moon不等式

模型变换IV结合Park不等式

自由权矩阵方法

改进型自由权矩阵方法



具有 H_∞
性能 γ 的
时滞相关
条件

时滞相关有界实条件(2)

利用改进自由权矩阵方法，即保留泛函导数中的有用项并考虑时变时滞、时滞上界和它们的差三者的关系，可以得到系统S4具有 H_∞ 性能 γ 的时滞相关条件。

定理5 给定标量 $h>0, \mu$ 和 $\gamma>0$ ，如果存在 $P=P^T>0$ ， $Q_i=Q_i^T\geq 0$ (其中 $i=1,2$)， $Z=Z^T>0, X=X^T\geq 0$ ，以及任意合适维数的矩阵 N 和 M ，使得如下的LMI成立，

$$\begin{bmatrix} \overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_2^T + hX & \sqrt{h}\overline{\Phi}_3^T Z & \overline{\Phi}_4^T \\ * & -Z & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} X & N \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} X & M \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$$

时滞相关有界实条件(3)

其中

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_1 &= \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q_1 + Q_2 & PA_d & 0 & PB_w \\ * & -(1-\mu)Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \overline{\Phi}_2 &= [N \quad N - M \quad -M \quad 0] \\ \overline{\Phi}_3 &= [A \quad A_d \quad 0 \quad B_w] \\ \overline{\Phi}_4 &= [C \quad 0 \quad 0 \quad 0]\end{aligned}$$

则满足时滞条件D2 的闭环系统S4具有 H_∞ 性能 γ 。

时滞无关 H_∞ 控制器设计(1)

- 考虑如下具有定常时滞的线性控制系统

$$S5: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases}$$

- 无记忆状态反馈 H_∞ 控制器设计

S5

$$K1: u(t) = Kx(t)$$



$$S6: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2 K)x(t) + A_d x(t-h) + B_1 w(t) \\ z(t) = (C_1 + D_{12} K)x(t) + D_{11} w(t) \end{cases}$$

如果闭环系统S6具有给定的 H_∞ 性能 γ , 那么控制器 $K1$ 称为系统S5的一个 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制器。

时滞无关 H_∞ 控制器设计(2)

定理6 给定标量 $\gamma > 0$, 如果存在对称矩阵 $L = L^T > 0$, $S = S^T \geq 0$, 以及任意合适维数的矩阵 V , 使得如下的LMI成立,

$$\begin{bmatrix} AL + LA^T + B_2V + V^TB_2^T + S & A_dL & B_1 & (C_1L + D_{12}V)^T \\ * & -S & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

那么系统 $S5$ 存在无记忆 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制器, 且控制器增益为 $K = VL^{-1}$

时滞无关 H_∞ 控制器设计(3)

➤ 动态输出反馈 H_∞ 控制器设计

$$S5: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad K2: \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_k \xi(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k \xi(t) + D_k y(t) \end{cases}$$



$$S7: \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{A}_d \bar{x}(t-d(t)) + \bar{B} w(t) \\ z(t) = \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{D} w(t) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{bmatrix}, \bar{C} = [C_1 + D_{12} D_k C_2 \quad D_{12} C_k], \\ \bar{D} &= D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{aligned}$$

时滞无关 H_∞ 控制器设计(4)

如果闭环系统 S_7 具有给定的 H_∞ 性能 γ ，那么控制器 K_2 称为系统 S_5 的一个 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器。应用定理4，可得如下系统 S_5 存在 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器的一个充分条件。

定理7 给定标量 $\gamma > 0$ ，如果存在对称矩阵 $P = P^T > 0$, $Q = Q^T \geq 0$ ，使得如下的矩阵不等式成立，

$$\begin{bmatrix} P\bar{A} + \bar{A}^T P + E^T Q E & P A_1 & P \bar{B} & \bar{C} \\ * & -Q & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & D^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

那么系统 S_5 存在 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器。

时滞相关 H_∞ 控制器设计(1)

➤ 考虑如下具有时变时滞的线性控制系统

$$S8: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} Cx(t) \\ Du(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad K1: u(t) = Kx(t)$$



$$S9: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - h) + B_w w(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} C \\ DK \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

如果闭环系统S9具有给定的 H_∞ 性能 γ ，那么控制器 $K1$ 称为系统S8的一个 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制器。

时滞相关 H_{∞} 控制器设计(2)

基于模型变换IV的参数调整方法

基于模型变换III的CCL方法

基于自由权矩阵的CCL方法

基于改进型自由权矩阵的ICCL方法



时滞相
关状态反
馈 H_{∞} 控
制器

时滞相关 H_∞ 控制器设计(3)

➤ 基于改进型自由权矩阵的ICCL方法

针对系统S8, 在定理5的基础上, 讨论系统的时滞相关状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法。

用 $A+BK$ 代替定理5中的 A , 用 $\begin{bmatrix} C^T & K^T D^T \end{bmatrix}^T$ 代替定理5中的 C , 并进行一些矩阵的变换处理, 可得如下时滞相关状态反馈 H_∞ 控制器设计定理。

定理8 给定标量 $h>0, \mu$ 和 $\gamma>0$, 如果存在对称矩阵 $L=L^T>0$, $R_i=R_i^T \geq 0 (i=1, 2)$, $Y=Y^T>0, W=W^T \geq 0$, 以及任意合适维数的矩阵 S, T 和 V , 使得如下的矩阵不等式成立,

时滞相关 H_∞ 控制器设计(4)

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2 + \bar{\Omega}_2^T + hX & \sqrt{h}\bar{\Omega}_3^T Z & \bar{\Omega}_4^T & \bar{\Omega}_5^T \\ * & -W & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} Y & S \\ * & LW^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Y & T \\ * & LW^{-1}L \end{bmatrix} \geq 0$$

其中

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} AL + LA^T + BV + V^T B^T + R_1 + R_2 & A_d L & 0 & B_w \\ * & -(1-\mu)R_2 & 0 & 0 \\ * & * & -R_1 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_2 = [S \quad T - S \quad -T \quad 0]$$

$$\bar{\Omega}_3 = [AL + BV \quad A_d L \quad 0 \quad B_w]$$

$$\bar{\Omega}_4 = [CL \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\bar{\Omega}_5 = [DV \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

那么满足时滞约束D2的系统S8存在 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制器，且控制器增益为 $K = VL^{-1}$

问题和展望

➤ 控制器设计方面

- 对于状态反馈控制器，如何将非线性矩阵不等式(NLMI)转化为LMI是还有待进一步的研究。同时，在无法转化为LMI时，如何利用优化算法进行求解也是今后需继续研究的方向
- 怎样针对时滞系统，设计简单易行的输出反馈控制器是非常值得深入研究的问题



谢谢各位!

Thank you!