第六章 因素模型与套利定价

本章学习提要

- 介绍可直接用于研究和证券的估价的因素模型
  - 单因素模型
  - 多因素模型
- 通过对套利进行定义，推导出套利定价模型，并说明其在定价方面的应用

章节目录

- 第一节 因素模型
- 第二节 套利定价

第一节　因素模型

- 一、单因素模型
- 二、多因素模型
- 三、因素模型的运用

第一节 因素模型

一、单因素模型

（一）单因素模型的提出

- 宏观经济因素会对几乎所有的公司都产生影响，而且尽管影响程度不同，但方向是一样的。
- 公司内部特有的因素对公司股价的影响的期望值是0，即随着投资的分散化，这类因素的影响是逐渐减少的。
- 因此，夏普在实际影响的因素只有宏观经济因素的基础上提出了单因素模型。

第一节 因素模型
一、单因素模型

（二）衡量风险与收益率

- 单因素模型假设市场组合的变化解释了所有股票的共同运动
- 根据单因素模型，某种给定股票的收益率的变化来自宏观经济因素的变动和公司特有因素的变动。
- 单因素模型的一般形式为：

$$r_{\mathrm{i}} = a_i + \beta_i \mathrm{F} + \varepsilon_i$$

第一节 因素模型

一、单因素模型

（二）衡量风险与收益率

例题

假设国内生产总值是决定股票A的收益率的共同因素，且$\beta_A = 1.1$。在股票持有期，GDP增速为8%，即F=8%；公司特定事件使得股价上升3%，即$\varepsilon_A = 3\%$；股票持有期初，期望收益率为5%，则股票A的收益率为：

$$r_A = a_A + \beta_A F + \varepsilon_A = 5\% + 1.1 \times 8\% + 3\% = 16.8\%$$

第一节 因素模型
一、单因素模型

（三）指数模型

- 单指数模型的公式

$$r_{\mathrm{ic}} = \alpha_i + \beta_i r_{Mc} + \varepsilon_i$$

其中， $r_{\mathrm{ic}} = r_i - r_f$

$$r_{Mc} = r_M - r_f$$

第一节 因素模型
一、单因素模型

（三）指数模型

- 指数模型与单因素模型的关系
  - 指数模型可以看作单因素模型的特例，是将单因素模型中的宏观因素具体为具有代表性的市场指数。它意味着，证券收益的不确定性来自微观风险和宏观风险，而其中，宏观风险具体是证券市场总体的风险，即系统性风险。

第一节 因素模型
一、单因素模型

（三）指数模型

- 指数模型中股票风险的测度
  - 股票i收益的方差为：

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{\mathrm{M}}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

r_M和ε_i的协方差为0，ε_i和ε_j也是不相关的,因此

  - 股票i 和股票j 收益 的协方差为：

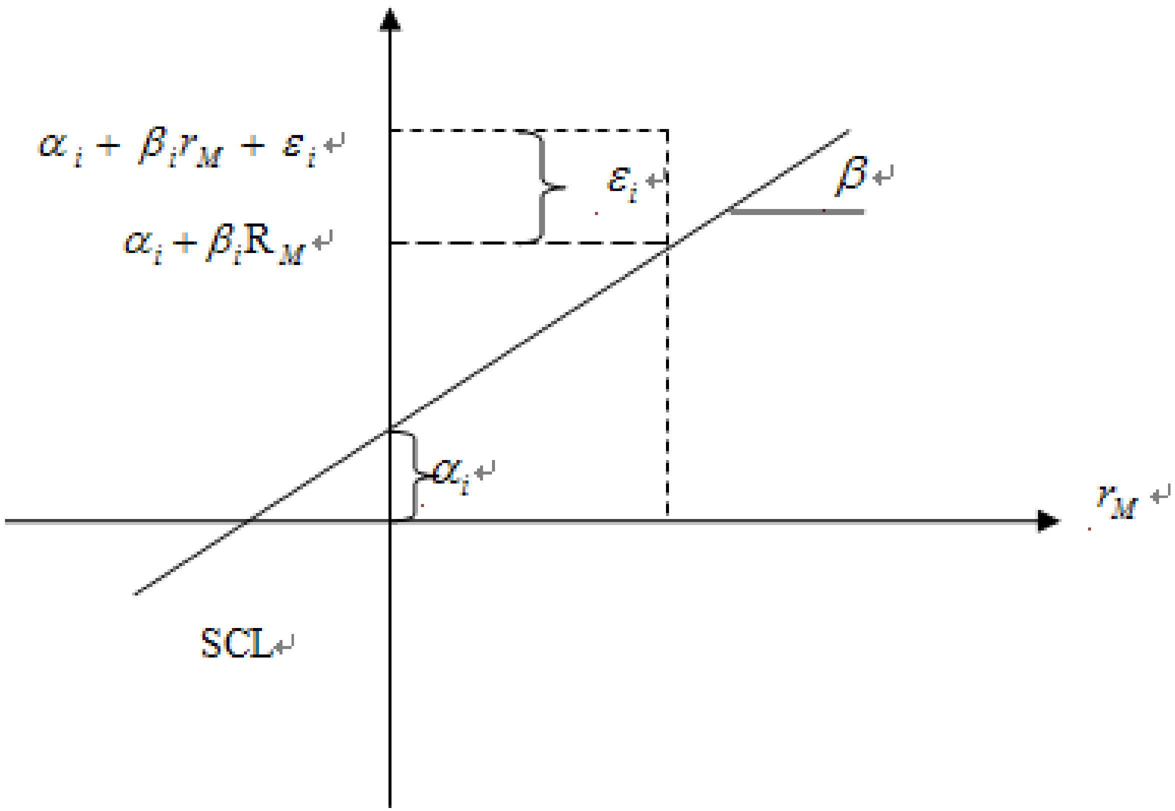
$$\operatorname{cov}\left(r_i, r_j\right) = \operatorname{cov}\left(\beta_i r_M, \beta_j r_M\right) = \beta_i \beta_j \sigma_{\mathrm{M}}^2$$

第一节 因素模型

一、单因素模型

（三）指数模型

- 证券特征线（SCL）



第一节 因素模型
二、多因素模型

（一）股票的特征

- 1、风险

股票收益率与风险之间是正相关的

- 2、流动性

股票收益率与流动性之间是负相关的

- 3、低估

不管回报率与“价值/成长”等相关因素的关系是源于风险还是过度反应，这两者往往是负相关的。

第一节 因素模型
二、多因素模型

（一）股票的特征

- 4、成长性

股票收益率和成长性因素是正相关的。

- 5、技术因素

股票收益率与股票存在一种短期（一个月）反转的模式，中期（六到十二个月）的惯性模式和长期（三到五年）的反转模式。

第一节 因素模型
二、多因素模型

（二）多因素模型的主要内容

- 多因素模型的一般形式

$$r_{\mathrm{i}} = a_i + \beta_{i1}\mathrm{F}_1 + \beta_{i2}\mathrm{F}_2 + \ldots + \beta_{ik}\mathrm{F}_{\mathrm{k}} + \varepsilon_i$$

第一节 因素模型
二、多因素模型

（二）多因素模型的主要内容

- 根据多因素模型测度的证券的期望收益、方差和协方差

$$\overline{r_{\mathrm{i}}} = a_i + \beta_{i1}\overline{\mathrm{F}_1} + \beta_{i2}\overline{\mathrm{F}_2} + \ldots + \beta_{ik}\overline{\mathrm{F}_{\mathrm{k}}}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_{i1}^2\sigma_{F1}^2 + \beta_{i2}^2\sigma_{F2}^2 + \ldots + \beta_{ik}^2\sigma_{Fk}^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

$$\sigma_{ij} = \beta_{i1}\beta_{j1}\sigma_{F1}^2 + \beta_{i2}\beta_{j2}\sigma_{F2}^2 + \ldots + \beta_{ik}\beta_{jk}\sigma_{Fk}^2$$

第一节 因素模型
二、多因素模型

（二）多因素模型的主要内容

- 根据多因素模型推导的方差和协方差建立在以下三个条件的基础之上：
  - 1）因素之间相互独立
  - 2）因素和随机项之间相互独立
  - 3）不同股票的随机项之间相互独立

第一节 因素模型

二、多因素模型

（二）多因素模型的主要内容

- 例题
- 假设国内生产总值和利率是决定股票A的收益率的共同因素，且 $\beta_{A1}=1.1, \beta_{A2}=0.9$。在股票持有期，GDP增速为8%，利率变化为-1%，即 $F_1=8\%, F_2=-1\%$，GDP增速和利率的波动率分别为5%和2%，即 $\sigma_{F1}^2=5\%, \sigma_{F2}^2=2\%$；公司特定事件使得股价上升3%，即 $\varepsilon_A=3\%$，此外 $\sigma_{ei}^2=1\%$，股票持有期初，期望收益率为5%，

求股票A的收益率和收益率方差

第一节 因素模型
二、多因素模型
（二）多因素模型的主要内容

- 例题

根据题意有：

$\beta_{A1}=1.1, \beta_{A2}=0.9$　　　F_1=8%,F_2=-1%,

$\sigma^2_{F1}=5\%, \sigma^2_{F2}=2\%$　　　$\varepsilon_A=3\%$　　　$\sigma^2_{\varepsilon i}=1\%$

那么：

$$r_A=a_A+\beta_A F+\varepsilon_A=5\%+1.1\times 8\%+0.9\times(-1)\%+3\%=15.9\%$$

$$\sigma_i^2=\beta_{i1}^2\sigma_{F1}^2+\beta_{i2}^2\sigma_{F2}^2+\sigma_{\varepsilon i}^2=1.1^2\times 5\%+0.9^2*2\%+1\%=8.67\%$$

第一节 因素模型
二、多因素模型

（二）多因素模型的主要内容

- Chen，Roll and Ross 提出的五因素模型

$$r_t = \alpha + \beta_{IP} IP_t + \beta_{EI} EI_t + \beta_{UI} UI_t + \beta_{CG} CG_t + \beta_{GB} GB_t + \varepsilon_t$$

五因素分别为：

- 行业生产增长率（IP）
- 预期的通货膨胀率（EI）
- 未预期的通货膨胀率（UI）
- 长期公司债券对长期政府债券的超额收益（CG）
- 长期政府债券对短期国库券的超额收益（GB）

第一节 因素模型
二、多因素模型

（三） Fama_French三因素模型

- 三因素模型设定：

$$\mathrm{E}\left[r_i\right]-r_f=b_i\left(\mathrm{E}\left[r_m\right]-r_f\right)+s_i SMB+h_i HML$$

三因素分别为：

- 1）市场风险因素：$\mathrm{E}\left[r_m\right]-r_f$
- 2）规模因素SMB：小市值公司与大市值公司股票的收益率之差
- 3）价值因素HML：高账面市值比率公司与低比率公司股票的收益率之差

第一节 因素模型
二、多因素模型

（三） Fama_French三因素模型

- 特征因素风险揭示
  - 在FF (1995)之前的文献中，关于为何选取市值和账面市值比率作为风险替代变量，以及二者就应反映了怎样的风险来源，并没有得到具体阐述。因此模型的方程仅提供了一种数据拟合的功能，对造成股票收益率波动的风险揭示不足，并且模型不能实现与多因子模型的有效区别。
  - FF (1995)认为，规模因素和账面市值比率的差异反映了上市公司在盈利能力及其持续性特征的显著不同

第一节 因素模型
二、多因素模型

（三） Fama_French三因素模型

- 学术界针对FF三因素模型的指责：
  - 虽然模型建立在单因素CAPM模型之上，与CAPM模型相比，三因素模型缺乏一种类似CAPM的解释机理，更多的是一种实证发现， 甚至是“数据加工”的结果。
  - 三因素模型并不是解释股票收益率的屡试不爽的法宝，对于股票市场上的所谓“趋势效应”等市场现象缺乏解释效力

第一节 因素模型
三、因素模型的运用

（一）用因素模型估计预期收益率

- 每种证券都具有不同的预期收益率主要差别在于风险上的不同。短期债券，长期债券与股票相比，短期债券风险相对较低，所以收益率也是最低，而股票风险相对较高，所以收益率也是较高。
- 通过对证券进行分类，可以利用过去收益率的样本均值来预测未来的预期收益率。

第一节 因素模型
三、因素模型的运用

（二）用因素模型计算协方差和方差

- 1、依据多因素模型的因素β系数计算协方差

$$\sigma_{ij}=Cov(r_i,r_j)=Cov(\alpha_i+\sum_{m=1}^{K}\beta_{im}\tilde{F}_m+\tilde{\varepsilon}_i,\alpha_j+\sum_{n=1}^{K}\beta_{jn}\tilde{F}_n+\tilde{\varepsilon}_j)$$

如果$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, Cov(F_m,F_n)=0;$当$i\neq j, m\neq n$时，

$$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{K}\beta_{im}\beta_{jm}Var(F_m) \qquad \sigma_i^2=\sum_{m=1}^{K}\beta_{im}Var(F_m)+Var(\varepsilon_i)$$

如果$Cov(F_m,F_n)\neq 0;$当$m\neq n$时，

$$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\beta_{im}\beta_{jn}Cov(F_m,F_n)$$

第一节 因素模型
三、因素模型的运用

（二）用因素模型计算协方差和方差

- 2、因素模型与证券收益率之间的相关性

在多因素模型中，因素β系数的结构相似的证券或证券组合的收益率高度相关，而那些因素β结构不同的证券彼此的相关性可能较低依据多因素模型的因素β系数计算协方差

第一节 因素模型
三、因素模型的运用

（二）用因素模型计算协方差和方差

- 3、因素模型在均方差分析中应用

与CAPM比较，对一个有N个证券组成的组合来说，CAPM需要计算N+N*(N-1)/2的方差与协方差，而K因素模型需计算K*N个β系数，外加K个因素方差和N个残差方差。由于K<<N， N~(K+1)*(N+1)-1<<N*(N+1)/2~N^2。从而计算量大大减小。

第一节 因素模型
三、因素模型的运用

（二）用因素模型计算协方差和方差

- 例题

假设市场中存在A、B两种股票，其风险收益特征如下：

	期望收益(%)	贝塔值	特定企业标准差
证券A	13	0.8	30
证券B	18	1.2	40

且共同因素的标准差为22%,无风险收益率为8%，若分别以0.3、0.45、0.25的比例投资于股票A、股票B和国库券（收益率为无风险利率），求组合的收益率和标准差

第一节 因素模型

三、因素模型的运用

（二）用因素模型计算协方差和方差

- 例题

	期望收益(%)	贝塔值	特定企业标准差
证券A	13	0.8	30
证券B	18	1.2	40

A和B收益的标准差为：

$$\sigma_A = \sqrt{0.8^2 \times 0.22^2 + 0.3^2} = 34.78\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{1.2^2 \times 0.22^2 + 0.4^2} = 47.93\%$$

组合的贝塔值和非系统性风险为：

$$\beta_p = 0.3 \times 0.8 + 0.45 \times 1.2 + 0 = 0.78$$

$$\sigma_{e_p}^2 = 0.3^2 \times 0.3^2 + 0.45^2 \times 0.4^2 + 0.25^2 \times 0^2 = 4.05\%$$

组合的期望收益率和标准差为：

$$r_p = 0.3 \times 13 + 0.45 \times 18 + 0.25 \times 8 = 14\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{\beta_p^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2} = 26.45\%$$

第二节 套利定价

- 一、套利定价理论
- 二、单因素模型的套利定价方法
- 三、双因素模型的套利定价方法
- 四．套利定价模型的运用

第二节 套利定价

一、套利定价理论

（一）套利的一般原理

- 套利是利用同一种实物资产或金融资产的不同价格来获取无风险受益的行为
- 投资者套利活动是通过买入收益率偏高的证券同时卖出收益率偏低的证券来实现的，其结果是使收益率偏高的证券价格上升，其收益率将相应回落；同时使收益率偏低的证券价格下降，其收益率相应回升，最终使得市场达到均衡。

第二节 套利定价
一、套利定价理论

（二）套利定价理论假设

- 1、资本市场是完全竞争的，无摩擦的。
- 2、投资者是风险厌恶的，且是非满足的。
- 3、所有投资者有相同的预期。

$$\tilde{R}_i = a_i + b_{i1}\tilde{F}_1 + b_{i2}\tilde{F}_2 + \cdots + b_{ik}\tilde{F}_k + \varepsilon_i$$

- 4、市场上的证券种类n必须远远超过模型中影响因素的种类k。
- 5、误差项 ε_i 与所有影响因素及证券i以外的其它证券的误差项是彼此独立不相关的。

第二节 套利定价
一、套利定价理论

（二）套利定价理论假设

APT模型相较于CAPM没有以下假设：

- 1、单一投资期
- 2、不存在税收
- 3、投资者能以无风险利率借贷
- 4、投资者以回报率的均值和方差为基础选择投资组合

第二节 套利定价
一、套利定价理论

（三）套利组合

- 无风险套利组合的构建是以因素模型为基础的。构建一个无风险套利组合，需要满足以下三个条件：
  - (1) 初始投资为零
  - (2) 组合的风险为零
  - (3) 组合的收益率为正。

第二节 套利定价
一、套利定价理论

（三）套利组合

- 初始投资为零

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

此时该组合的收益为：

$$E(R_A) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \tilde{F}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$$

第二节 套利定价

一、套利定价理论

（三）套利组合

- 组合的风险为零，即该组合既没有系统性风险，又没有非系统性风险

满足下面三个条件的证券组合符合这一要求

- (1) $x_i \approx \frac{1}{n}$
- (2) n很大
- (3) 对每个因素而言 $\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ik} = 0$

根据大数定理，由条件(1)和(2)得：$\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i = 0$

综合（3）得到该组合的收益为：$E(R_A) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)$

第二节 套利定价
一、套利定价理论

（三）套利组合

- 组合的收益为正：

$$E(R_A)=\sum_{i=1}^{n}x_iE(R_i)>0$$

当市场均衡时， $E(R_A)=\sum_{i=1}^{n}x_iE(R_i)=0$

第二节 套利定价
一、套利定价理论

- 套利定价模型

根据线据线性代数的知识，式$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$和式$\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ik} = 0$表示一组正交条件，

而式$\tilde{R}_A = \sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) = 0$又产产生了必须满足的一个正交条件。所以，

只需$E(\tilde{R}_i)$为这$(k+1)$个向量的线向量的线性就可以了。因此：

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_k b_{ik}$$

由于 $R_f = \lambda_0$

$$E(R_i) = R_f + \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_k b_{ik}$$

第二节 套利定价
一、套利定价理论

- 举例
- 股票A、B、C的价格只对利率因素敏感，且敏感程度分别为1.2、1.5和1.8。股票A、B的期望收益率分别为4%、5%和8%。那么，我们可以构建一个无风险套利的组合，即卖出1000美元的股票B，同时买入500美元的股票A和500美元的股票,，求组合的期望收益率。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_A + x_B + x_C = 0.5 + (-1) + 0.5 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ik} = 0.5 \times 1.2 + (-1) \times 1.5 + 0.5 \times (1.8) = 0$$

$$E(R_A) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) = 0.5 \times 4\% + (-1) \times 5\% + 0.5 \times 8\% = 1\% > 0$$

无论利率如何变动，组合的期望收益都不受影响。该组合的无风险收益为1%。

第二节 套利定价

二、单因素模型的套利定价方法

- （一） 单因素模型的定价公式

$$E(r_i) = r_f + \lambda_k b_{ik}$$

当 $\overline{\delta_i} = R_f + \lambda_k$ 时，

$$E(r_i) = r_f + (\overline{\delta_k} - r_f) b_{ik}$$

第二节 套利定价
二、单因素模型的套利定价方法

- （二）一个单因素模型的例子

假定证券的回报率与只与一个因素有关：

$$r_i = a_i + b_i\lambda + \varepsilon_i$$

假定投资者拥有3种证券，这三种证券具有如下的预期回报率和敏感度。是否存在套利机会？

	预期收益率 r_i (%)	敏感因子 b_i
证券A	12	1.0
证券B	25	3.5
证券C	15	2.0

第二节 套利定价
二、单因素模型的套利定价方法

- （二）一个单因素模型的例子

	预期收益率 r_i(%)	敏感因子 b_i
证券A	12	1.0
证券B	25	3.5
证券C	15	2.0

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$1.0x_1 + 3.5x_2 + 2.0x_3 = 0$$
$$12x_1 + 25x_2 + 15x_3 > 0$$

- 取一个满足上述条件的三种证券所占的比例（0.3，0.2，-0.5）假设将投资额度设置为100万美元，则卖出100万美元的证券C，同时买入60万美元的证券A和40万美元的证券B。
- 该投资组合对风险因子的敏感程度为0，而其收益率为1.1%。
- 随着套利行为的进行，这一无风险收益会逐渐趋于零。

第二节 套利定价
三、双因素模型的套利定价方法

（一） 多因素模型的定价公式

$$E(r_i) = r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \ldots\ldots + \lambda_k b_{ik}$$

当k=2时，即为双因素模型，即

$$E(r_i) = r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

第二节 套利定价

三、双因素模型的套利定价方法

（二）一个双因素模型的例子

假定证券的回报率与两个因素有关：

$$r_i = a_i + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2 + \varepsilon_i$$

四种证券具有如下的预期回报率和敏感度，是否存在套利机会？

	预期收益率 r_i (%)	对因素1的敏感度 b_{i1}	对因素2的敏感度 b_{i2}
证券A	15	0.8	2.0
证券B	25	3.6	1.5
证券C	10	1.6	1.0
证券D	8	2.4	2.0

第二节 套利定价

三、双因素模型的套利定价方法

（二）一个双因素模型的例子

	预期收益率 r_i(%)	对因素1的敏感度 b_{i1}	对因素2的敏感度 b_{i2}
证券A	15	0.8	2.0
证券B	25	3.6	1.5
证券C	10	1.6	1.0
证券D	8	2.4	2.0

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$0.8x_1 + 3.6x_2 + 1.6x_3 + 2.4x_4 = 0$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 1.0x_3 + 2.0x_4 = 0$$

$$15x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 8x_4 > 0$$

取一个满足上述条件的四种证券所占的比例（0.2，0.2，-0.1，-0.3），无风险套利收益率为4.6%。如果这种套利行为多次重复，那么，证券A和证券B价格会不断上涨，而证券C和证券D价格会不断下跌，无风险收益不断收窄，最终将使市场达到均衡，不再存在无风险套利机会。

本章小结

- 本章介绍了单因素模型、多因素模型等因素模型以及在此基础上展开的套利定价理论。
- 因素模型认为是一种回归模型。在实践中，我们将具有的收益率作为共同因素的度量，即可以得到了单指数模型；将市场收益率、规模因素和价值因代表性市场素共同作为共同因素的度量，即得到了Fama－French三因素模型。

本章小结

- 在因素模型的基础上，推导出了套利定价理论。套利定价理论的核心思想是：如果市场存在不均衡的定价，那么通过买入和卖空证券，就可以构建对风险因素敏感度为零而组合收益为正的无风险套利组合；此时，随着套利行为的不断进行，资产价格会逐渐向其均衡价格回归，套利机会消失，此时的资产价格即为市场的均衡价格。

关键词

- 单因素模型（simple factor model）
- 指数模型（index model）
- 市场模型（market model）
- 证券特征线（characteristic line）
- 多因素模型（multi-factor model）
- 套利（arbitrage）
- 套利定价理论（arbitrage pricing theory）
- 资产配置模型(Advanced Asset Allocation)