第十七课

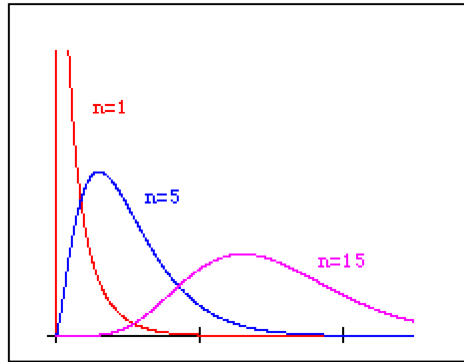
6．2 抽样分布

一、 x 2 分布

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为总体 $X\sim N(0,1)$ 的样本，则统计量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

服从自由度为 n 的 $\chi^2(n)$ 分布，密度函数为：

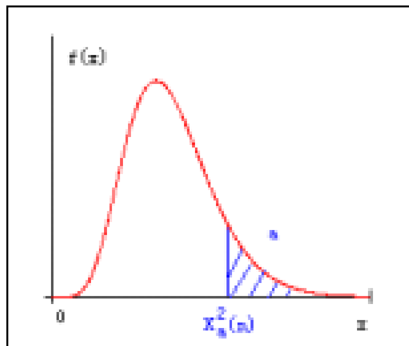
$$f_{\chi^2(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$



这是一个非对称的

对于给定的正数 a，0<a<1，a 分位点

$$P\{\chi^2>\chi_a^2(n)\}=\int_{\chi_a^2(n)}^{+\infty}f(x)dx=a$$



如：a=0.1,n=25，可查附表 5 有

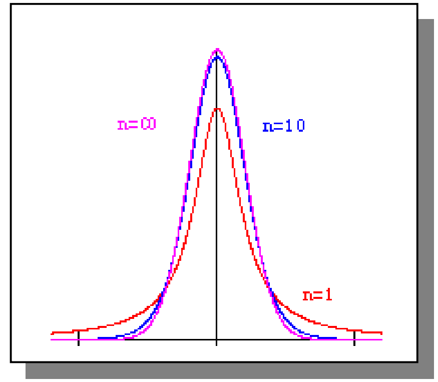
$$\chi_{0.1}^2(25)=34.382$$

二、t 分布(学生氏（Student）分布)

设 X~N(0,1),Y~ χ^2(n)，并且 X，Y 相互独立，则称随机变量

$t = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 t~t(n)。密度函数为：

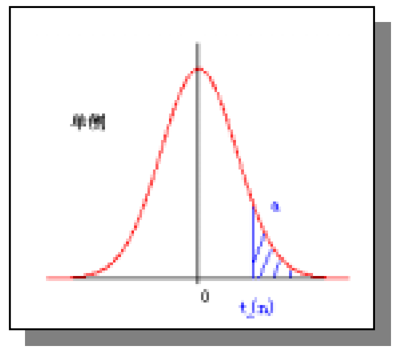
$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < t < +\infty$$

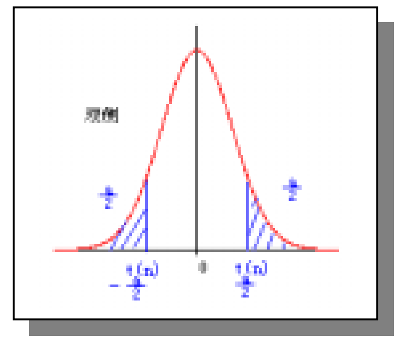


对于给定的正数 a，0<a<1，

a 单侧分位点， $P\{t > t_a(n)\} = \int_{t_a(n)}^{+\infty} f(t)dt = a$

a 双侧分位点 $P\{|t| > t_{\frac{a}{2}}(n)\} = \int_{t_{\frac{a}{2}}(n)}^{+\infty} f(t)dt = a$





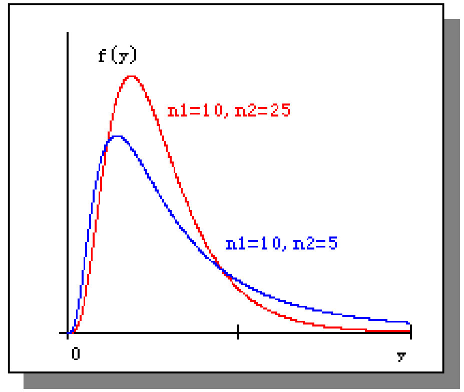
由于 t 分布是对称的，所以有公式：$t_{1-a}(n)=-t_a(n)$

当 n>45 后，可利用 $t_a(n) \approx Z_a$ （正态分布表），即当 n→+∞时，t 分布趋近于标准正态分布。

三、F 分布

设 X~χ²(n_1)，Y~χ²(n_2)，X，Y 相互独立，则随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为（n_1,n_2）的 F 分布，记为 F~F(n_1,n_2)。密度函数为：

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)\left(\dfrac{n_1}{n_2}y\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$



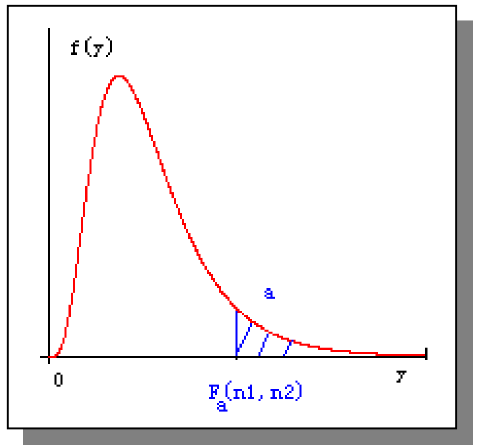
对于给定的正数 a，0<a<1，a 分位点

$$P\{F>F_a(n_1,n_2)\}=\int_{F_a(n_1,n_2)}^{+\infty}f(y)dy=a$$

如：a=0.05，n1=15,n2=12，（查附表 6）$F_{0.05}(15,12)=2.62$

性质：$F_{1-a}(n1,n2)=\dfrac{1}{F_a(n2,n1)}$

这是一个非对称的



四、正态总体的样本均值与样本方差的分布

定理 1：

总体 X~ N(μ，σ²)，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为其样本，则 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

或 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

定理 2：

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是总体 N(μ，σ²)的样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差，则有

1^0 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；

2^0 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立。

这两个定理在后面的学习中会用到，大家应给予一定的重视。

定理 3：

设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n1}$ 与设 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n2}$ 分别是具有相同方差的两正态总体 N(μ_1，σ²)，N(μ_2，σ²)的样本，且两样本相互独立。设 $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n2}Y_i$ 分别两个样本的均值，$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别为这两个样本的方差，则有：

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)，\text{其中 } S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$