第四章 随机变量的数字特征（习题课及单元测试）

内容提要

一、 随机变量的数学期望

1、 离散型随机变量的数学期望的定义

$$E(X)=\sum_k x_k p_k$$

2、 连续型随机变量的数学期望的定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

3、 随机变量的期望的意义

随机变量 X 的数学期望 E(X)是一个能反映随机变量 X 取值的“平均”的一个数字特征，所以也称为 X 的均值：

（1） 从数学期望定义的形式上看，它是 X 的可能值以其相应概率的加权平均。这里所谓“权”可以理解为各个可能值在平均时的“比例分配”方式。

（2）　若对 X 的取值进行多次观察，则它的观测值的算术平均值 $\bar{x}$ 将在 E(X)附近摆动。

4、　期望的简单性质

（1）　E(c)=c

（2）　E(kX)=kE(X)

（3）　E(X+b)=E(X)+b

（4）　E(kX+b)=kE(X)+b

其中 k,b,c 都是常数。

5、　期望的计算

只要一个随机变量 X 的分布是已知的，那么 X 的期望 E(X)就可以由 1、2、中两式求得，不需要另外的方法。对随机变量函数的期望的计算有下面两个重要的公式：

设 X 的概率分布为 P{X=x_k}=p_k (k=1,2,…)，则 Y=g(x)的期望 E(Y)可按下式直接计算：

$$E(Y)=E[f(x)]=\sum_{k} g(x_k)p_k$$

$$E(Y)=E[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

二、 随机变量的方差

1、 随机变量的方差的定义

$D(X)=E[X-E(X)]^2$

(1) 离散型定义 $D(X)=\sum_k [x_k-E(X)]p_k$

(2) 连续型定义 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

显然 D(X)≥0。称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差。

2、 随机变量的方差的意义

随机变量 X 的方差 D(X)是一个能反映随机变量 X 取值对于它的期望的分散程度的一个数字特征。

这可以从下面两个方面来理解：

（1） 从方差定义的形式上看，它是 X 的可能值与 E(X)之差的平方以相应概率为权的加权平

均。

（2） 由切比雪夫不等式也可以看出，方差反映了 X 的取值对于 E(X)的分散程度。

3、 方差的简单性质

（1） $D(c)=0$

（2） $D(kX)=k^2D(X)$

（3） $D(X+b)=D(X)$

（4） $D(kX+b)=k^2D(X)$

其中 k,b,c 为常数。

4、 方差的计算

只要一个随机变量 X 的分布是已知的，那么 X 的方差 D(X)就可以由 1 中的（1），（2）式求得。

但多数情况下，由下式计算更为方便

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

三、 常用分布的期望和方差

二点分布；二项分布；泊松分布；几何分布；均匀分布；指数分布；正态分布

四、 协方差及相关系数

五、 原点矩和中心矩

要求

1、 理解随机变量的期望和方差的定义及意义。

2、 会利用期望与方差的计算公式计算期望与方差；会利用随机变量函数的数学期望计算随机变量函数的数学期望。

3、 熟练掌握几个常用分布的期望和方差的计算。

4、 要记忆和熟练运用期望和方差的简单性质。

典型例题分析

例 1： 把 4 个球随机投入 4 个盒子中去。设 X 表示空盒子的个数，求 E(X)和 D(X)。

分析：先求 X 的概率分布，再利用 $E(X)=\sum_k x_k p_k$ 和 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 计算。

解：先求 X 的概率分布。X 所有可能的取值为 0，1，2，3。

利用古典概率的计算方法可以求得

$$P\{X=0\}=\frac{4!}{4^4}=\frac{6}{64},\ P\{X=1\}=\frac{3C_4^1C_4^1C_3^1}{4^4}=\frac{36}{64},\ P\{X=2\}=\frac{C_4^2(2C_4^3+C_3^2)}{4^4}=\frac{21}{64},\ P\{X=3\}=\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}$$

所以：$E(X)=0\times\frac{6}{64}+1\times\frac{36}{64}+2\times\frac{21}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{81}{64}$

而 $E(X^2)=0^2\times\frac{6}{64}+1^2\times\frac{36}{64}+2^2\times\frac{21}{64}+3^2\times\frac{1}{64}=\frac{129}{64}$

所以：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{129}{64}-\frac{81^2}{64^2}=\frac{1695}{64^2}$

例 2：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求 E(X)，D(X)。

分析：利用 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 和 D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 计算。

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=0$

$D(x)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

例 3：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求 E(2X)和 E($e^{-2X}$)

分析：利用 $E(Y)=E[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$ 式，或者利用期望的性质计算。

解：由期望的性质有 E(2X)=2E(X)。由于 X 服从参数 λ =1 指数分布，故有 E(X)=1。于是 E(2X)=2

而 $E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=\frac{1}{3}$

例 4：若随机变量 X 的期望 E(X)和方差 D(X)均存在，又 $X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$，证明 E($X^*$)=0，D($X^*$)=1。

分析：E(X)和 D(X)均为常数，故可利用期望和方差的性质直接证明。

证明：在期望的性质 E(kX+b)=kE(X)+b 中取 $k=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}$，$b=-\frac{E(X)}{\sqrt{D(X)}}$，则有

$$E(X^*)=E[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{E(X)}{\sqrt{D(X)}}-\frac{E(X)}{\sqrt{D(x)}}=0$$

类似地，利用方差的性质 D(kX+b)=k^{2}D(X)有

$$D(X^*)=D[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{1}{(\sqrt{D(X)})^2}D(X)=1$$

例 5：抽样检查产品质量时，对于一批产品，一件一件地进行检查。如果检查 10 件产品未发现次品，则停止检查而认为这批产品的质量合格，如果检查到第 10 件产品时或者在此以前，发现次品，则停止检查而认为这批产品的质量不合格。设产品的次品率为 0.1，并且每批产品的数量都很大，因而可以认为每检查一件产品次品的概率都是 0.1，问平均每批产品要检查多少件？

分析：由题中所说的检查质量的方法可见一批产品实际检查的产品件数 X 是一个随机变量，要求平均检查的产品件数就要计算 E(X)，为此需要先求 X 的分布。在求 X 的分布时，注意题中所提到的各次抽查相互独立，而且每次抽到次品的概率都是 0.1。

解：设 X 表示一批产品实际检查的产品件数，则 X 为随机变量。

X 所有可能的取值为 1，2，…，10。由于各次抽取相互独立，而且每次抽到的次品的概率都为 0.1，所以

P{X=k}=P{“前 k-1 次抽到正品，第 k 次抽到次品”}$=(1-0.1)^{k-1}\times 0.1=0.1\times 0.9^{k-1}$ (k=1, 2, …, 9)

P{X=10}=P{“第 10 次才抽到次品”}+P{“抽到 10 件均为正品”}

$$=(1-0.1)^{9}\times 0.1+(1-0.1)^{10}=0.9^{9}$$

即 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=0.1\times 0.9^{k-1}\ (k=1,2,\cdots,9),\quad P\{X=10\}=0.9^{9}$$

可以求得

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{9}0.1k\times 0.9^{k-1}+10\times 0.9^{9}=0.1\sum_{k=1}^{9}k\times 0.9^{k-1}+10\times 0.9^{9}$$

$$=0.1\Big(\sum_{k=1}^{9}q^{k}\Big)'_{q=0.9}+10\times 0.9^{9}=1+\frac{0.9(1-0.9)}{0.1}=6.5$$

利用导数，化简计算

即平均每批产品要检查 6.5 件。

例 6：搜索沉船，在时间 t 内发现沉船的概率为$1-e^{-\lambda t}$ （λ>0），求为了发现沉船所需的平均搜索时间。

分析：发现沉船所需的搜索时间 X 是一随机变量，要求平均搜索时间即是要求 E(X)。

解：设发现沉船所需要的搜索时间为 X。由题设知$P\{X\le t\}=1-e^{\lambda t}=F(t)$ （t>0）

故 X 的概率密度为$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$，可见 X 服从参数为 λ 的指数分布，因此 E(X)=1/λ，即发现沉船所需要的平均搜索时间为 1/λ。

自测题:请返回后，在测试题中进行。