第十三课

4．3 协方差和相关系数

下面，我们将讨论在(X, Y)中 X 与 Y 的关系。

定义：

E{[X-E(X)][Y-E(Y)]}称为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 Cov(X,Y)。

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为 X 与 Y 的相关系数（或标准协方差）

由这些关系可以推出：
D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)
Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)

协方差性质：

1^0、Cov(X,Y)=Cov(Y,X)

2^0、Cov(aX,bY)=abCov(X,Y) ， a,b 为常数

3^0、Cov(X1+X2,Y)=Cov(X1,Y)+Cov(X2,Y)

定理

设 ρ_{XY} 是随机变量 X 与 Y 的相关系数，则有
1、$|\rho_{XY}|\leqslant 1$
2、$|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是 X 与 Y 依概率 1 线性相关，即 P{Y=aX+b}=1，a, b 为常数

依概率就是在概率这个条件下。

因为 D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)

所以当 X 与 Y 相互独立时，Cov(X,Y)=0

由上面的定义可知这时 $\rho_{XY}=0$，当 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X 与 Y 是不相关的。

总结：

> 当 X 与 Y 相互独立时，它们必定不相关，但反过来就不一定了，即不相关不一定相互独立。

例 1：设(X, Y)服从二维正态分布，求 X 与 Y 的相关系数。

解：已知 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$， $f_Y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

所以 $E(X)=\mu_1$， $E(Y)=\mu_2$， $D(X)=\sigma_1^2$， $D(Y)=\sigma_2^2$

而 $$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}dxdy$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}=\rho\sigma_1\sigma_2$$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$

> 这是一种特殊情况，只对二维正态分布成立，一定要注意。

前面已知对于二维正态分布 X 与 Y 相互独立的充要条件为分布中的 $\rho=0$，而现在有 $\rho_{XY}=\rho$

所以 ρ =0，即得出对于二维正分布中 X 与 Y 相互独立的充要条件为相关系数 $\rho_{XY}=0$

4．4 矩

定义：

设 X 和 Y 为随机变量，若 $E(X^k)$，k=1,2,3,…存在，称它为 X 的 k 阶原点矩。
若 $E\{[X-E(X)]^k\}$，k=1,2,…存在，称它为 X 的 k 阶中心矩。
若 E（X^kY^L）,k,L=1,2,…存在，称它为 X 与 Y 的 K+L 阶混合矩。
若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^L\}$，k,L=1,2,…存在，称它为 X 和 Y 的 K+L 阶中心混合矩。

定义：

二维随机变量(X_1,X_2)有四个二阶中心矩，分别记为：

$C_{11}=E\{[X_1-E(X_1)]^2\}$

$C_{12}=E\{[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]\}$

$C_{21}=E\{[X_2-E(X_2)][X_1-E(X_1)]\}$

$C_{22}=E\{[X_2-E(X_2)]^2\}$

将它们排成矩阵的形式：$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$，这个矩阵叫做$(X_1,X_2)$的协方差矩阵。

这个定义可以推广到 n 个随机变量的情况。