第十二课

三、方差计算

1、 二项分布 X~B(n,p), E(X)=np

因为 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

所以 D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=npq

2、 泊松分布 X~P(λ), E(X)= λ

因为 $E(X^2)=\sum_{k=2}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \lambda^2 e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

所以 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\lambda$

3、 均匀分布 X~U(a,b) , $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

因为 $E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$

所以 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

4、 指数分布 X~E(λ) E(X)=1/ λ

因为 $E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \overset{\lambda x = t}{=} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$

所以 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

只有正态分布不用重要公式来计算

5、 正态分布 X~N(μ , σ^2) , E(X)= μ

$$D(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

例 2：设 X 服从正态分布 N(μ，σ^2)中，求 X 落在区间(μ−3σ， μ+3σ)内的概率。

解：$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=\phi(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma})$

$$=\phi(3)-\phi(-3)=\phi(3)-[1-\phi(3)]$$

$$=2\phi(3)-1=2\times0.99865-1$$

=0. 9973

可以看出 X 而落入(μ−σ， μ+σ),(μ−2σ， μ+2σ)的概率都小于落入(μ−3σ， μ+3σ)的概率。这就是管理中用到的“3σ 规则”。