第九课

3．4 相互独立的随机变量

前面介绍过相互独立的事件 P(AB)=P(A)P(B)

定义：

> 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$,$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数，若对于所有 x,y 有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，即 $P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}\,P\{Y\leqslant y\}$
> 称 X 和 Y 相互独立的随机变量。

离散型：$P\{X=x_i,Y=y_i\}=P\{X=x_i\}\ P\{Y=y_i\}$

连续型：$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

例 1：(X, Y)服从二维正态分布密度函数为：$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2}]}$

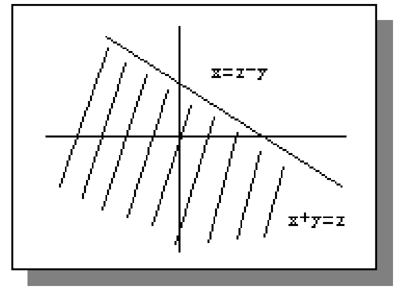
由 3 节例 3 知：$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$，　$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

> 上一节例 3 中的相关系数的意义。

所以 $f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2}]}$　要 $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ 的充要条件是：$\rho=0$

3．5 两个随机变量的函数的分布

Z=X+Y 的分布



设(X,Y)为二维随机变量，密度函数为 f(x,y)，Z=X+Y 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint\limits_{x+y \le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy]dx$$

所以 Z 的概率密度为：$F_Z^{'} = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

当 X 和 Y 相互独立，即 f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)，有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为卷积公式，记为 f_X*f_Y，即：

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 1：设 X 与 Y 相互独立，且 X，Y~N（0，1）即

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$，$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$，求 Z=X+Y 的概率密度。

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

令 $t=x-\frac{z}{2}$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

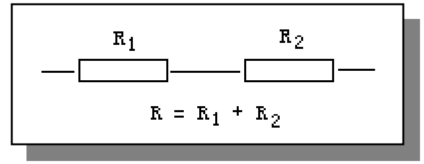
，所以 Z~N(0,2)

一般 $X\sim N(a_1,\sigma_1^2),Y\sim N(a_2,\sigma_2^2)$，X，Y 相互独立，Z=X+Y，有 $Z\sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

例 2：在一简单电路中，两电阻 R_1 和 R_2 串联联接，设 R_1，R_2 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50} & 0\le x\le 10\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

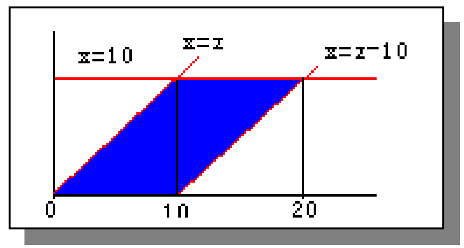
，试求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度。



解：因为 R 的概率密度为 $f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,r-x)dx$，当 $\begin{cases}0<x<10\\ 0<z-x<10\end{cases}$ 有 $\begin{cases}0<x<10\\ z-10<x<z\end{cases}$ 参考积分区域图得

$$f_R(r)=\begin{cases}\int_0^r f(x)f(r-x)dx & 0\le x<10\\ \int_{r-10}^{10} f(x)f(r-x)dx & 10\le x\le 20\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}\left(600r-60r^2+r^3\right) & 0\le r<10\\ \dfrac{1}{15000}(20-r)^3 & 10\le r\le 20\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



第三章 多维随机变量及其分布（习题课及单元测试）

内容提要

一、 二维随机变量的联合分布

1、 随机向量

$\xi=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

2、 二维随机变量的分布函数

$F(x,y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}$

3、 二维离散型随机变量及其分布

$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ $(i=1,2,\ldots;j=1,2,\ldots)$ $F(x,y)=\sum_{xi<x}\sum_{yj<y} p_{ij}$

4、 二维连续型随机变量及其分布

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

二、 二维随机变量的边缘分布

1、 边缘分布函数

$$F\ \ (x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F\ \ (y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

2、 二维离散型随机变量的边缘概率分布

3、 二维连续型随机变量的边缘概率密度

三、 相互独立的随机变量

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

四、 两个随机变量的函数 Z=X+Y 的分布

要求

1、 理解二维随机变量的含义及其实际意义。

2、 熟悉二维随机变量（X，Y）的分布函数 F(x,y)的定义和性质，会用 F(x,y)表示 $P\{x_1<X\leqslant x_2，y_1<Y\leqslant y_2\}$

3、 熟悉离散型二维随机变量（X，Y）的概率分布的定义和性质。对于可以用离散型随机变量描述的简单随机试验，会求其分布。

4、 熟悉连续型二维随机变量（X，Y）的概率密度 $f(x,y)$的定义和性质，及其与它的分布函数 $F(x,y)$的关系。对于简单的情况，由 $f(x,y)$会求 $F(x,y)$，由 $F(x,y)$会求 $f(x,y)$。对于简单的平面区域 D，会利用 $f(x,y)$求 $P\{(X,Y)\in D\}$。

5、 理解二维随机变量的边缘分布的含义。对于简单的情况，会由 $F(x,y)$求边缘分布函数 $F_X(x)$，$F_Y(y)$；会由 $f(x,y)$求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；会求离散型二维随机变量的边缘概率分布。

6、 理解两个随机变量的相互独立性的定义及判定方法，会利用随机变量的相互独立性求二维随机变量的概率分布或者概率密度。

7、 会求两个随机变量的函数 $Z=X+Y$ 的概率分布或者概率密度。

典型例题分析

例 1：某同学求得二维随机变量（X，Y）的概率分布为

X \ Y	-3	5	7	1/2
1/3	1/2	0	0	1/16
2	1/16	1/4	0	1/4
0	0	1/32	1/64	0

试说明该同学的计算结果是否正确。

分析：二维离散型随机变量的概率分布必须具有性质 $p_{ij}\geqslant 0$，$\sum_i\sum p_i=1$，如果有一条不成立，则他的计算结果就是错误的。

解：由于该同学的计算结果使得（X，Y）的概率分布有$\sum^3\sum^4 p_{ij}>1$，故他的计算结果是错误的。

例 2：设有二元函数，$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & x^2+y^2<0\\ 0 & 其它\end{cases}$试说明 f(x,y)能否是某个二维随机变量的概率密度。

分析：二维随机变量的概率密度 f(x,y)必须具备性质 f(x,y)≥0 和$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，如果有一条不成立，f(x,y)就不能是某个二维随机变量的概率密度。

解：由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2<2}(x^2+y^2)dxdy = \int^{2\pi} d\theta \int^{\sqrt{2}} r\ dr = 2\pi \neq 1$$

故 f(x,y)不能是某个二维随机变量的概率密度。

例 3：设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=Ke^{-(3x+4y)}$ (x>0,y>0) ，试求：

（1） 常数 K

（2） P{0<X<1,0<y<2}

（3） (X,Y)的分布函数 F(x,y)

分析：利用概率密度 f(x,y)的性质可求解（1）和（2）。在计算 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$ 时，由于 f(x,y)是分区域定义的，故需对（x,y）分区域计算 F(x,y)。

解：（1）由于 f(x,y)必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$，于是有

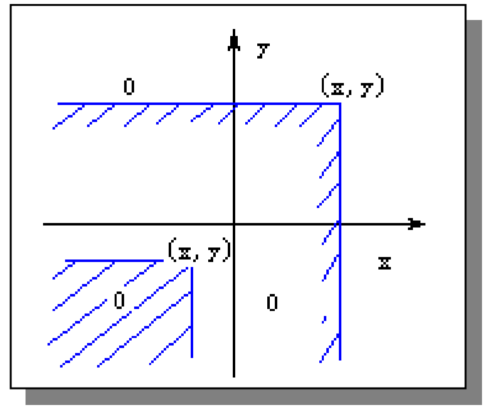
$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}$ f(x,y)dxdy=$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}$ K$e^{-(3x+4y)}$dxdy=K/12=1，解得 K=12

（2）利用 $P\{a<X<b,c<Y<d\}=\int_a^b\int_c^d$ f(x,y)dxdy 式有

$P\{0<X<1,0<Y<2\}=\int^1\int$ 12$e^{-(3x+4y)}$dxdy=(1-e^{-3})(1-e^{-4})≈0.9499

（3） 于 f(x,y)是分区域定义的，故在计算

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$ 时也需分区域计算。



为了清楚起见，将 f(x,y)的函数值分区域标在 xoy 平面上(如图)，

当 x<0 或者 y<0 时 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dxdy=0$

当 x>0，y>0 时

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(v,u)dvdu=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}$ 12$e^{-(3x+4y)}$dxdy=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})

于是求得（X，Y）的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-}\quad)(1-e^{-4y}) & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

例 4：设随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$ (-∞<x,y<+∞)

求关于 X 和 Y 的边缘概率密度。

分析：利用公式 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 和 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 计算

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}dy=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dy}{9+y^2}=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}dx=\dfrac{6}{\pi^2(9+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{4+x^2}=\dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$

例 5：设随机变量（X，Y）的联合概率分布为

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6
0	0.202	0.174	0.113	0.062	0.049	0.023	0.004
1	0	0.099	0.064	0.040	0.031	0.020	0.006
2	0	0	0.031	0.025	0.018	0.013	0.008
3	0	0	0	0.001	0.002	0.004	0.011

试说明 X，Y 是否相互独立。

分析：对于离散型二维随机变量（X，Y），若对一切 i，j，有 $p_{ij}=p_ip_j$，则 X，Y 相互独立；若存在一对 i，j，有 $p_{ij}\neq p_{i\circ}\,p_{\circ j}$，则 X，Y 不相互独立。求解本题，需要先求出边缘概率分布，再进行判断。

解：由上面的表可见 $p_{10}=P\{X=1,Y=0\}=0$，又可以

看出显然有 $p_{1\circ}=P\{X=1\}\neq 0$，$p_{\circ 0}=P\{Y=0\}\neq 0$，于是由于 $p_{10}\neq p_{1\circ}\,P_{0\circ}$，故 X，Y 不相互独立。

自测题:请返回后，在测试题中进行。