第六课

2．4 连续型随机变量的概率密度

一、 连续型随机变量的概率密度

对于离散型，考虑事件{X=a}发生的概率。非离散型考虑{X=a}就无意义了，应考虑{a<X<b}概率。

定义：

对于随机变量 X 的分布函数 F(x)，存在非负的函数 f(x)使对于任意实数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量，f(x)称为 X 的概率密度函数，简称概率密度

概率密度性质：

1 f(x)≥0

2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

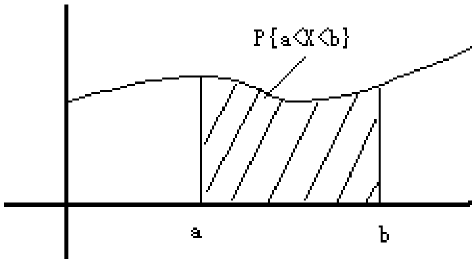
3 $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

4 若 f(x)在点 x 处连续，则有 F'(x)=f(x)

概率密度是连续型随机变量的一个重要特征。利用这些性质可以方便地计算一些参数，特别是性质 2。

利用密度函数可求得随机变量 X 落入任意区间内的概率，如：

$$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx$$



注：因为：$F\{X=C\}=\int_c^c f(x)dx=0$，所以：连续型随机变量取值在一点上的概率为零，利用这一性质有：$P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}$。且在取值区间上能任意加或减有限点。

例 1：设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$，试确定常数 k，并求 P{X>0.1}.

解：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，即有 $\int_0^{+\infty} ke^{-3x}dx=1$，解得 k=3，于是 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

而 $P\{X>0.1\}=1-P\{X\leqslant 0.1\}=1-\int_{-\infty}^{0.1} f(x)dx=1-\int_0^{0.1} 3e^{-3x}dx=0.7408$

二、 几个常见的分布

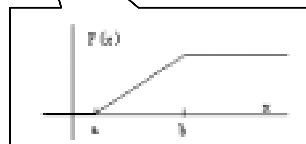
1、 均匀分布

随机变量 X 在[a,b]上取值，概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，

称 X 在区间（a,b）上服从均匀分布，记为 X~U(a,b)

1^0 f(x)≥0 ; 2^0 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}=1$

分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$



例 2：公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，乘客到达汽车站的任一时刻是等可能的。求乘客候车时间不超过 3 分钟的概率。

解：设公共汽车到站的时间为 X，而 X~U(0,5)，所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & 0\le x\le 5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

那么 $P\{0<X<3\}=\int_0^3 \frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}$

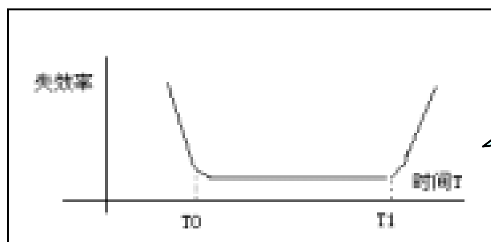
2、 指数分布

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ （λ>0），称 X 服从参数为 λ 的指数分布，

记为 X∽E(x)，

指数分布常用于寿命分布中。

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



从 0 到 T0 为产品早期失效期，T0 到 T1 为偶然失效期，T1 以后为耗损失效期。

3、 正态分分

设随机变量 X 的概率密度为

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $-\infty < x < +\infty$，其中 μ， σ 为常数。称 X 服从参数为 μ， σ 的正态分布（高斯分布 Gauss），记为 X—N(μ，σ²)分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$，当 μ=0，σ=1 时，称 X 服从标准正态分布，记为 X-N(0,1)

对于标准正态分布 Φ(x) 的函数值有表供查

Φ(-x)=1-Φ(x)

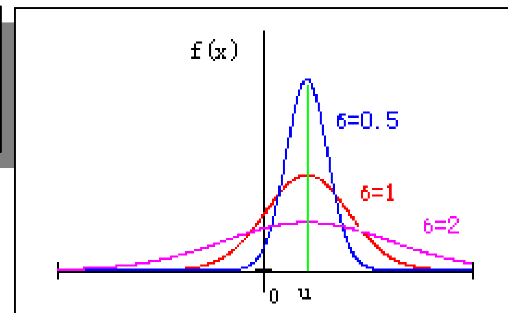
密度函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

分布函数 $\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

一般 X—N(μ，σ²)， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$，可以通过变换 $u=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$ 得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

这个过程称为“标准化”，也就是把非标准正态分布转化为标准正态分布，这样就可以进行查表计算了。



一般有： $P\{x_1 < X \le x_2\}=\phi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

例 3：某同学考试的平均成绩 X 服从正态分布，满足 X—N(80,4)，求一次考试的平均成绩在 80 至 85 分概率。

解：$P\{80 < X < 85\} = \phi(\frac{85-80}{2}) - \phi(\frac{80-80}{2}) = \phi(2.5) - \phi(0) = 0.9938 - 0.5 = 0.4938$

a 分位点：

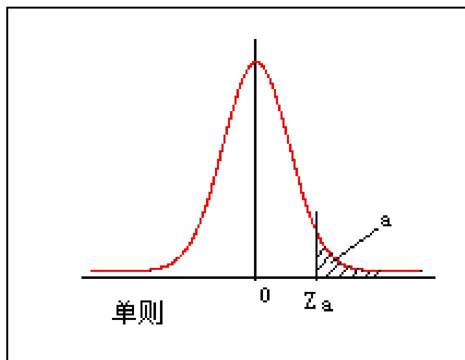
设 X—N(0,1)，若 Z_a 满足条件 $P\{X>Z_a\}=a$　$0<a<1$，称点 Z_a 为标准正态分布的 a 分位点，即 X 大于 Z_a 点的概率

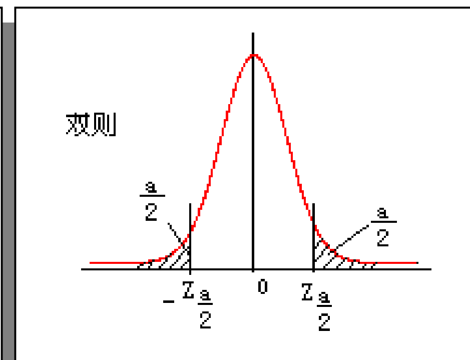
正态分布是这几个中最重要的分布。在自然现象中，大量的随机变量都服从或近似服从正态分布。如：一个地区人的身高；测量的误差；海洋波浪的高度等等

单则查表计算公式：

因为：$P\{X>Z_a\}=a$　所以：$P\{X\leq Z_a\}=1-a$

即：$\phi(Z_a)=1-a$，由给定的 a 可以算出 1-a 得 Z_a





双则查表计算公式：

因为：$P\{|X|>Z_{a/2}\}=a/2$　所以 $P\{|X|\leq Z_{a/2}\}=1-a/2$

即：$\phi(Z_{a/2})=1-a/2$，由给定的 a 可以算出 1-a/2 然且查

表可得 $Z_{a/2}$

例 4：如 a=0.05 有 $\Phi(Z_{0.05})=1-0.05)=0.95$

查表得：$Z_{0.05}=1.645$

371 页附表 2

$\Phi(Z_{0.05/2})=1-0.05/2=0.975$

查表得：$Z_{0.05/2}=1.96$