第二课

1．4 等可能型（古典概型）

具有两个特点：

（1）试验的样本空间的元素只有有限个

（2）试验中每个基本事件出现的可能性相同

$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$，$P(e_1)=P(e_2)=\ldots=P(e_n)$，则称为等可能概型

由于基本事件是互不相容的，所以：

$1=P(S)=P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)=nP(e_i)$ ，所以 $P(e_i)=\frac{1}{n}$ ，（i=1,2,…,n）

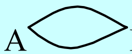
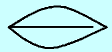
这一结论说明：每一基本事件出现的概率相等。如抛硬币：n=2，所以 P（A）=0.5，出现一面的概率。

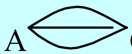
若事件 A 中包含 k 基本事件，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中所包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}$$

这是计算古典概型中事件 A 发生的概率公式，这个公式中分母容易计算，但分子的计算不太容易。它们的计算都要用到排列组合的知识。

排列组合补充：

乘法原理：A  B  C 2X3=6

加法原理：A  C 1+1+1=3

$A_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$，n 个字母任取 r 个字母的排列数，要分秩序，即 AB，BA 不一样，如排队。

$C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，n 个字母任取 r 个的组合数，不分秩序，即 AB，BA 一样，如进入一个小组。

例 1：袋中有 6 只形状大小轻重完全一样，但颜色不同的乒乓球，其中 4 只是白色，2 只是红色，问从袋中任取一只是白球的概率为多少？

分析：将 6 只乒乓球编号为 1，2，3，4，5，6，则样本空间为 S={1，2，3，4，5，6}，其中 i 表示“取得第 i 号球”，那么基本事件的总数为 n=6

设 A 为“取得白球”这一事件，因为袋中有 4 只白球，每个都可能被取到，所以 A 包含的基本事件数 k=4 于是有：

解： $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

例 2：将 n 个球随机地放入 n 个盒子中去，每个盒子恰有一个球的概率是多少？

解：先求 S 的总数

每个球都可以放进 n 个盒子中的任一个盒子，共有 n 种不同的放法，那么 n 个球放进 n 个盒子就应有 nXnX…Xn=n^n 种不同放法，

所以：S=n^n

现在来求每个盒子中恰有一个球时，球的不同放法的种数：

第一个球可以放进 n 个盒子中的任一人，有 n 种放法；

第二个球可以放进余下的 n-1 个盒子中的任一个，有 n-1 种放法；

第三个球可以放进余下的 n-2 个盒子中的任一个，有 n-2 种放法；

… … …

就象有 n 个座位 n 个人来坐一样

最后一个球只能放进唯一余下的 1 个盒子中。

利用乘法原理：所以 k=n(n-1)(n-2)…2 1=n!

从而：$P(A)=\dfrac{n!}{n^n}$

例 3：将 n 只球随机地放入 N（N≥n）个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率（设盒子的容量不限）。

这是一个非常有用的模型：如每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的。即都等于 1/365，那么随机选取 n(≤365)个人，他们的生日各不相同的概率为$(365.364\ldots(365-n+1)/365^n$，因而，n 个人至少有两人生日相同的概率为 $p=1-(365.364\ldots(365-n+1)/365^n$，可计算下述结果

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

从表中可以看出在一个 64 人以上的班中“至少有两人生日相同”这一事件几乎为必然的。

解：总的基本事件数为 N^n，而每个盒子中至多放一只球共有 N(N-1)(N-2)···(N-(n-1))种不同放法。

所以：$p=\dfrac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)}{N^n}=\dfrac{A_N^n}{N^n}$

例 4：10 本书任意放在书架上，求指定三本书放在一起的概率。

解：n=10!

由于三本书放在一起，可把三本书当作一个元素，那么就应为 8 个元素进行全排乘上三本书

的全排就为指定三本书放在一起的放法，即 k=8!.3!

所以：$P(A)=\dfrac{8!.3!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

例 5：在一批 N 个产品中，有 M 个是次品，从这批产品中任意抽取 n 个产品，求其中恰有 m 个次品的概率。

解：在 N 个产品中抽取 n 件（不放回抽样），可能的取法为 C_N^n

在 1,2,…,N 中取 1,2,…,n 与 2,1,…,n 一样，不分秩序

现在来求在 N 件产品中抽取 n 件，其中恰含 m 个次品的取法：

因为在 M 个次品中取 m 件所有可能的取法为：C_N^m

取得的次品

在 N-M 件正品中取 n-m 件所有可能取法为 C_{N-M}^{n-m}

取得的正品

剩下产品

余下应取的

搭配起来，N 件产品中抽取 n 件，其中含 m 件次品的取法 $C_N^m\ C_{N-M}^{n-m}$

于是所求概率为： $p=\dfrac{C_M^N C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

这个模型叫超几何分布，在产品质量控制中被广泛应用。

如：有 100 台电视机，其中有 5% 的次品，今从中随机抽取 15 台，求其中恰有 2 台次品的概率：

$$p=\frac{C_5^2 C_{95}^{13}}{C_{100}^{15}}=0.1377$$

例 6：某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么 12 次接待来访者都在周二、周四的概率为

$$2^{12}/7^{12}=0.0000003$$

人们在长期的实践中总结出“小概率事件在一次实验中几乎不发生”（实际推断原理）

由于这是一个小概率的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假定的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为接待时间是有规定的。