第一课

引言

事件的发生可分为：必然性和偶然性。必然性寓于偶然性中（随机性），偶然性比必然性更加广泛、更为一般。必然性也叫精确性，精确性的反面为模糊性，世界事物很复杂，过分要求精确反而模糊，适当模糊反而精确。

例如：要找一位头发 50cm 长的同学（精确），找一位长头发的同学（模糊）。

模糊性与随机性是有本质区别的：

例如：抛一枚骰子，“出现小的点数”，“出现 3 点”

确定性---因果律---经典数学

$$\text{非确定性--}\begin{cases}\text{随机律}--\text{统计数学(我们这门课)}\\ \text{互克律}--\text{模糊数学}\end{cases}$$

两种自然现象：

必然现象：在一定的条件下必然发生，如向上抛石头，必然要掉下来；矩形面积 S=ab，以前所学的

数学研究的问题。

随机现象：

每次试验或观察前，无法预知其确切结果，如：抛掷一枚硬币；从 0，…，9 这十个数中任取一个数中任取一个。但做大量试验后就能出现一定的规律性。

做大量试验后就能出现一定的规律性。

概率统计就是解决这类问题的学科。

小知识：Bayes 学派与非 Bayes 学派是概率科学中的两个学派，也是数学学科中持有不同观点斗争最为激烈的两个学派。它们争论的焦点是：全随机问题与非全随机问题。

1．1 随机试验

我们把对自然现象进行观察或进行一次科学试验，统称为一个试验。

下面我们来分析一些试验：

E1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；
E2：将一枚硬币抛二次，观察正反面出现情况；
E3：掷一颗骰子，观察出现的点数；
E4：向直径为 1 米的圆靶进行射击，观察弹落点与靶心的距离；
E5：从 0，1，2，…，9 这十个数中任取一数，看取得什么数。

注意保留

这些试验都有以下共同特点：

1. 可以在相同的条件下重复地进行；
2. 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确所有可能结果；
3. 每次试验之前不能确定哪个结果会出现国。

书写黑板

具有上述三个特性的试验称为随机试验，记为 E

1．2 随机事件、样本空间

一、 随机事件

在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现而大量重复中却有某种规律性的事情，称为此随机试验的随机事件（事件），一般用大写字母 A、B、C 等表示。

例如：在 E1 中“出现 T”；在 E3 中“出现偶数点”；在 E4 中“弹落点与靶心的距离大于 10cm 小于 30cm”；在 E5 中“取得的数大于 5”等都是事件。

为模糊事件！

在试验中必然会发生的事情叫必然事件，记为 S；不可能发生的事情叫做不可能事件，记为Φ。

如：掷骰子“点数不大于 6”是必然事件；“点数大于 6”是不可能事件；问：

“出现小点数”是什么事件？

二、 样本空间

1、本事件：在随机试验 E 中，每一个实际可能出现的实验结果之中的最简单的，不能再细分的随机事件称为 E 的一个基本事件，常用字母 e 表示。

随机试验中所有基本事件组成的集合叫做样本空间，记为 S （space 的第一个字母）。

S 中的每一元素即每一个基本事件称为一个样本点。

随机事件是由基本事件构成的，是 S 的一子集。

$$\text{基本事件} \xrightarrow{\text{构成}} \text{随机事件} \xrightarrow{\text{组成}} \text{样本空间}$$

如在

E1 中：S1={H，T}；H 表示“出现正面”，T 表示“出现反面”

E3 中：S3={1，2，3，4，5，6}；

E4 中：S4=$\{x \mid 0 \le x \le 100\}$；x 是弹落点与靶心的距离，单位为 cm

E5 中：S5={0，1，2，3，4，5，6，7，8，9}；

在 E3 中，如事件 A 为“出现偶数点”，则可表示为：A={2，4，6}

在 E5 中，如事件 B 为“取得的数大于 5”，则 B={6，7，8，9}

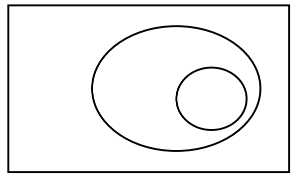
注：必然事件就是样本空间 S；不可能事件就是空集Φ

文氏图

三、 事件之间的关系与事件的运算

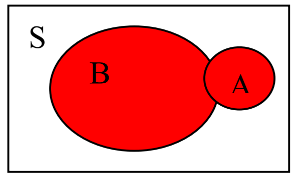
设试验 E 的样本空间为 S，A，B，A_K(K=1,2,…)是 E 的事件。

1、 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，



记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$ 如有 $B\supset A$ 和 $A\supset B$，称 A 与 B 相等，A=B

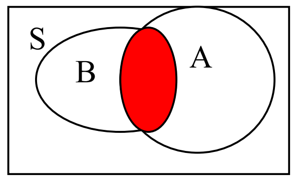
2、 事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的和，



记为 $A\cup B$（A+B）. 可以推广到 n 个和 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 及无穷多个和 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$

重复时只写一次，如：
A={1，2，3}，B={2，3，4}
A+B={1，2，3，4}

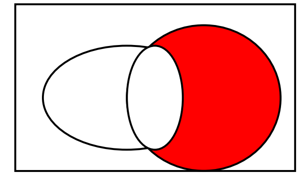
3、 事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的积，



记为 A∩B 或 AB。可以推广到 n 个积 $\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ 和无穷多个积 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$

4、 事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，

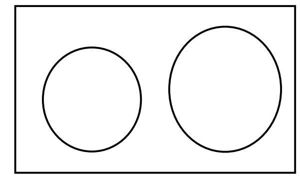
记为 A-B。



5、 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 AB=ϕ，

则称事件 A 与事件 B 是互不相容的。

基本事件之间互不相容



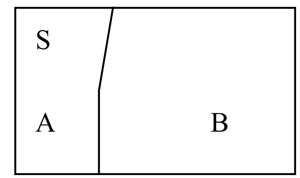
6、 若事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，

亦即事件 A 和事件 B 满足条件

A+B=S　AB=ϕ，则称事件 A 与事件 B 互逆，

又称 A 是 B 的对立事件（或 B 是 A 的对立事件）

记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$ （注 $\overline{A}=S-A$）



运算规律：

这些运算定律能化简计算

交换律：A+B=B+A；AB=BA

结合律：A+（B+C）=（A+B）+C；A（BC）=（AB）C

分配律：A+（BC）=（A+B）（A+C）；A（B+C）=（AB）+（AC）

德.摩根律：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例：将一枚硬币抛二次，观察正反面出现点数。

解：样本空间 S={（H，H）（H，T）（T，H）（T，T）} H—出现正面，T—出现反面，那个在前表示第一次出现。

事件 A1：“第一次出现 H”，即 A1={（H，H）（H，T）}

事件 A2：“两次出现同一面”，即 A2={（H，H）（T，T）}

事件 A3：“只有一次出现 H”，即 A3={（H，T）（T，H）}

而 A1+A2={（H，H）（H，T）（T，T）}

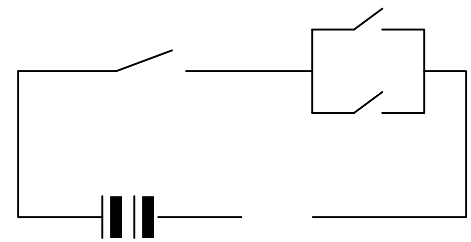
A1A2={（H，H）}

A1-A2={（H，T）}

因为：A2+A3=S，且 A2A3=ф，所以：A2 与 A3 互逆，即 $\overline{A2}=A3$

例：如图所示电路（可看成二层楼之间合控制一路灯），以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B，C，D

分别表示事件“继电器”接点 I，II，III 闭合。



那么 $BC \subset A$　BC+BD=A　$BD \subset A$　而 $\bar{B}A = \Phi$　$\bar{B}$ 与 A 互不相容

1．3 频率与概率

一、 频率

定义：设随机事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的频率

对于频率要用试验才能得出结果

试验者	投掷次数 n	正面出现次数 n_H	频率 $f_n(H)$
德.摩根（De.morgan）	2048	1061	0.518
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

频率只能近似地反映某一事件出现的可能性

不管什么人去抛硬币，当试验次数逐渐增加时，$f_n(H)$总在 0.5=1/2 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5，这个数能反映出现 H 的可能性的大小。

二、 频率的性质：

随机试验 E，样本空间为 S，A、B 为 E 的二个随机事件，则在 n 次试验中的频率具有下列性质：

1、 $0 \le f_n(A) \le 1$

2、$f_n(S)=1$

3、若 A、B 互不相容，即 AB=ϕ 则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$

频率有一致命缺点，就是要做大量试验，从而不现实，也不精确，没有应用价值。

下面提出概率（probability）概念

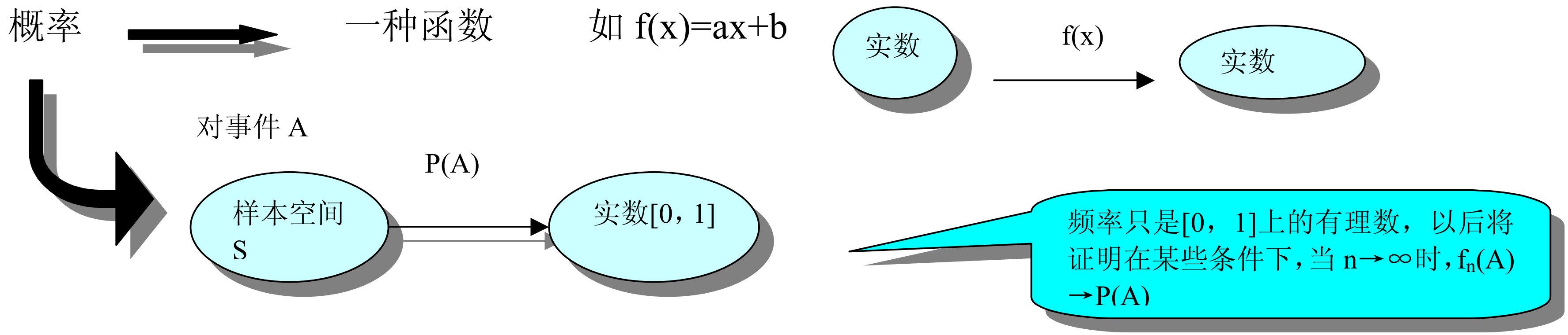
三、概率定义：

定义：设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对每一事件 A 赋予一实数 P(A)，如果 P(A)满足以下性质：

1、对每一事件 A 有 $0 \le P(A) \le 1$

2、P(S)=1

3、对于两两互不相容的事件 A_k (k=1,2,…)有 $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$则称 P(A)为事件 A 的概率



概率的简单性质：

1、 $P(A)=1-P(\overline{A})$

2、P(Φ)=0

3、若 $A\subset B$， 则 $P(A)\le P(B)$， P(B-A)=P(B)-P(A)

4、P(A+B)=P(A)+P(B)-PAB) （加法公式，多除少补原理）

可以推广到 n 个（见书 12 页）

（以上证明见书 11 页）