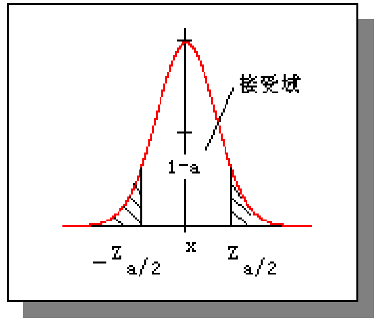
第二十三课

8．2 正态总体均值的假设检验

一、 单个总体

1^0 U 检验法



已知方差 $\sigma^2=\sigma^2_0$，检验假设 H_0： $\mu=\mu_0$（H_1： $\mu\neq\mu_0$）

因为 $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$， 当 $\sigma^2=\sigma^2_0$ 时若 H_0 成立， 则 $U=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

用 U 作为 H_0 的检验统计量（U 检验法）

$P\{|U|>Z_{a/2}\}=a$， 当 $\{|U|>Z_{a/2}$ 时拒绝 H_0， 当 $\{|U|\leqslant Z_{a/2}$ 时接受 H_0

2^0 t 检验法

未知方差 σ^2， 检验假设 H_0： $\mu=\mu_0$（H_1： $\mu\neq\mu_0$）

由于 $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$， 当 H_0 成立时， 则 $T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

用 T 作为 H_0 的检验的统计量， 称为 t 检验法

$P\{|T|>t_{a/2}(n-1)\}=a$， 当 $\{|T|>t_{a/2}(n-1)$ 时拒绝 H_0， 当 $\{|T|\leqslant t_{a/2}(n-1)$ 时接受 H_0

例 1：由以往的经验知道，某种钢生产的钢筋其强度（公斤/毫米 ^{2}），服从正态分布，今随机抽取 6 根钢筋测得强度为：48.5，49.0，53.5，49.5，56.0，52.5。问能否认为该种钢生产的钢筋其平均强度为 52.0（取 a=0.05）？

解：钢筋强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，，σ^2 未知

（1）要检验的假设为 H_0：$\mu=\mu_0=52.0$

（2）以 $T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 作为检验统计量，即有 $T=\dfrac{\bar{x}-52.0}{s/\sqrt{6}} \sim t(5)$

（3）给定 a=0.05，查 t 分布表得：$t_{a/2}(n-1)=t_{0.025}(5)=2.571$

（4）由所给数值算得 $\bar{x}=51.5$，$S^2=\dfrac{44.5}{5}$

$$|T|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{51.5-52.0}{\sqrt{44.5/6}}\right|=0.41$$

由于 $|T|<t_{0.025}(5)$，所以接受 H_0，即可认为这种钢生产的钢筋其平均强度为 52.0 公斤/毫米 ^{2}。

例 2：某种电子元件的寿命 x（以小时计）服从正态分布，μ，σ^2 均未知，现测得 16 只元件，其样本均值为 $\bar{x}=241.5$，样本标准方差为 S=98.7259。问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225（小时）？

解：按题意需检验 H_0： $\mu \leqslant \mu_0=225$，H_1： $\mu>225$，取 a=0.05，由于此检验的拒绝域为

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_a(n-1)$$，可查表得：$t_a(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$

所以 $T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{241.5-225}{98.7259/\sqrt{16}}=0.6685<1.7531$，由于落在拒绝域外（接受域内），故接受 H_0，即认为元件的平均寿命不大于 225 小时。

二、 两个正态总体均值的检验

讨论两个母体的假设检验，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，样本分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$，

未知 σ_1^2，σ_2^2 但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，检验 H_0： $\mu_1=\mu_2$

也称为 t 检验法。

因为：$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$，其中 $$S_w=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

当 $|T|>t_{a/2}(n+m-2)$ 时拒绝 H_0。

例 3：某种物品在处理前与处理后分别抽样分析其含脂率如下表：

处理前 x_i	0.19 0.18 0.21 0.30 0.41 0.12 0.27
处理后 y_i	0.15 0.13 0.07 0.24 0.19 0.06 0.08 0.12

假定处理前后的含脂率都服从正态分布且方差相同，问处理前后含脂率的平均值有无显著差异（a=0.05）？

解：已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 检验假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，n=7, m=8, 而 $\bar{x}=0.24$，$S_1^2=0.009$；$\bar{y}=0.13$，$S_2^2=0.0039$，

因为：$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$ 而 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}=\sqrt{\dfrac{6\times0.009+7\times0.0039}{7+8-2}}=0.079$，$t_{a/2}(n+m-2)=t_{0.025}(13)=2.16$

所以：$$|T|=\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right|=\frac{0.24-0.13}{0.0794\times\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}}=2.683>2.16$$

由于 $\bar{x}=0.24>0.13=\bar{y}$，所以处理后的含脂率平均值显著降低了。

所以应拒绝假设 H_0，即认为处理前后含脂率平均值有显著差异。

8．3 正态总体方差的假设检验

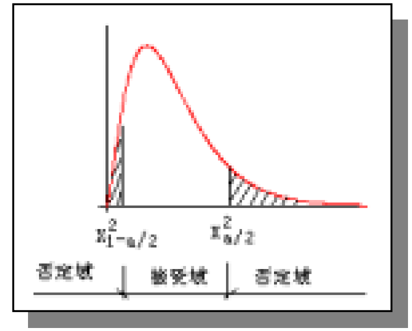
一、 单个总体的情况

1^0 χ^2 检验

未知数学期望 μ，检验假设 H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$

由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，当假设 H_0 成立时，有统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$P\{\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)\} = \dfrac{a}{2}$，$P\{\chi^2 < \chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)\} = \dfrac{a}{2}$



所以当 $\chi^2 < \chi^2_{1-a/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{a/2}(n-1)$ 时拒绝假设 H_0

2^0 x^2 检验

数学期望已知 $\mu=\mu_0$，检验假设 H_0:：$\sigma^2=\sigma_0^2$

由于 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$，当假设 H_0 成立时，$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$

当 $\chi^2 < \chi^2_{1-a/2}(n)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{a/2}(n)$ 时拒绝假设 H_0

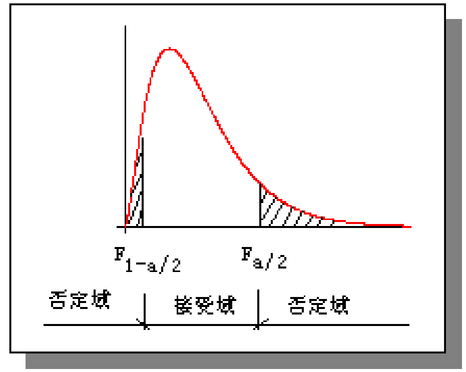
例 1：某厂生产的某种型号电池，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$（小时 ^{2}）的正态分布。今有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命波动性较大。为判断这种想法是否合乎实际，随机取了 26 只这种电池测出其寿命的样本方差 $s^2=7200$（小时 ^{2}）。问根据这个数字能否断定这批电池的波动性较以往的有显著变化（取 a=0.02）？

解：本问题要求在水平 0.02 下，检验假设 H_0：$\sigma^2=5000$ （H_1：$\sigma^2\neq5000$）

因为 $\chi^2_{1-a/2}(n-1)=\chi^2_{1-0.02/2}(25)=11.524$， $\chi^2_{a/2}(n-1)=\chi^2_{0.02/2}(25)=44.314$

而 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{25\times7200}{5000}=36$， 由于 $\chi^2_{1-a/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{a/2}(n-1)$ 所以接受 H_0，即认为在 0.02 水平下这批电池的波动性较以往的并无显著的变化。

二、两个正态总体方差的检验



讨论两个母体的假设检验，$X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

样本分别为 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$，

F 检验法：

未知 μ_1， μ_2，检验假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

由于统计量 $F=\dfrac{S_1^2(n-1)}{S_2^2(m-1)}\sim F(n-1,m-1)$，给定水平 a，查 $F_{1-a/2}(n-1,m-1)$，$F_{a/2}(n-1,m-1)$

当 $F<F_{1-a/2}(n-1,m-1)$ 或 $F>F_{a/2}(n-1,m-1)$ 时拒绝 H_0

例 2：在上节例 3 中，问处理前后含脂率的方差有无显著差异（a=0.05）？

解：$S_1^2=0.0091$，$S_2^2=0.0039$

由于 $F=\dfrac{S_1^2(n-1)}{S_2^2(m-1)}=\dfrac{0.0091}{0.0039}=2.33$， $F_{a/2}(n-1,m-1)=F_{0.025}(6,7)=5.12$，

$F_{1-a/2}(n-1,m-1)=\dfrac{1}{F_{a/2}(m-1,n-1)}=\dfrac{1}{F_{0.025}(7,6)}=\dfrac{1}{5.70}$， 而 $F_{0.975}(6,7)<F<F_{0.025}(6,7)$

从而接受 H_0，即认为处理前后含脂率方差无显著差异。

注：如果两个正态总体的分布参数 $\mu_1 \mu_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2$ 都是未知时，应该先检验它们的方差是否有显著差异，只有在方差无显著差异时，即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，才能用所讲的 T 检验法检验 H_0： $\mu_1=\mu_2$

在假设检验这一章中我们只给出了部分假设检验的方法，对于其它情况下方法完全与我们前面所学的类似，所以对于其它形式可以参见在教材 204 页的公式。