鲁東大學 LUDONG UNIVERSITY

数学分析2

第十三章　函数项级数

§13.2　一致收敛的函数列的性质

——数学本1801、1802

主讲教师：宋美

问题的提出

$$\{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

$\{f_n(x)\}$每一项都连续，极限函数 $f(x)$ 是否连续？

$$\{f_n'(x)\}: f_1'(x), f_2'(x), \cdots, f_n'(x), \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

$$\{\int_a^b f_n(x)dx\}: \int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, \cdots, \int_a^b f_n(x)dx, \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

问题的提出

$$\{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in D$$

$$f(x)$$

连续?

可导?

可积?

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

极限

极限交换定理

定理13.8 （极限交换定理）

$$\left.\begin{array}{r} f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty),\ x\in U^\circ(x_0) \\ \text{对每一个}n, \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$和$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$均存,且

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

证 先证$\{a_n\}$是收敛数列. 对任意$\varepsilon > 0$, 由于$\{f_n\}$一致收敛, 故存在正整数 N, 当 $n>N$ 及任意正整数 p, 对一切 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ 有

$$| f_n(x) - f_{n+p}(x) | < \varepsilon.$$

从而

$$| a_n - a_{n+p} | = \lim_{x \to x_0} | f_n(x) - f_{n+p}(x) | \le \varepsilon.$$

于是由柯西准则可知$\{a_n\}$是收敛数列, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A$,

下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=A.$

注意到

$$
\begin{aligned}
&|f(x)-A|\\
\le &|f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|+|a_{N+1}-A|
\end{aligned}
$$

只需证明不等式右边的每一项都可以小于事先给定的任意正数即可.

由于$f_n(x)$ 一致收敛于$f(x)$, a_n收敛于A, 因此对任意$\varepsilon > 0$, 存在正数N, 当$n > N$时，对任意$x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别当$n = N + 1$时, 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} 和 |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为$\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x)=a_{N+1}$，故存在$\delta>0$，当

$0<|x-x_0|<\delta$时,也有

$$|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样,当x满足$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时,

$$|f(x)-A|\le|f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|$$

$$+|a_{N+1}-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

这就证明了$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

定理指出: 在一致收敛的条件下, $\{f_n(x)\}$ 中关于独立变量 x 与 n 的极限可以交换次序, 即(1)式成立.

类似地, 若 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to a^+}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$;

若 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to b^-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)$.

连续性定理

定理13.9 (连续性) 若函数列$\{f_n\}$在区间 I上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续.

证 设 x_0 为 I 上任一点. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, 于是由定理 13.8 知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也存在, 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 上连续.

连续性定理

定理13.9 (连续性)

$$\left.\begin{array}{r} f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty),\ x\in I \\ \text{每一项都连续} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\text{连续}.$$

证　设 x_0 为 I 上任一点.

$$\left.\begin{array}{r} f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty),\ x\in I \\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \end{array}\right\}$$

由极限交换定理知

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

注：1、若$\{f_n(x)\}$每一项都连续，极限函数不连续 $\Rightarrow \{f_n(x)\}$不一致收敛

例如: 函数列$\{x^n\}$的各项在$(-1,1]$上都是连续的, 但其极限函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x<1, \\ 1, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$时不连续, 所以$\{x^n\}$在$(-1,1]$上不一致收敛.

2、可构造一个函数列每一项连续，极限函数也连续，但该函数列不一致收敛。

$\{x^n\}$在$(0,1)$不一致收敛

可积性定理

定理13.10 (可积性)

$$\left.\begin{array}{r} f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty),\ x\in[a,b] \\ \text{每一项都连续} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{可积}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

分析 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$

证明

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n \to \infty)$, $x \in [a,b]$ 对于任意 $\varepsilon > 0$,

存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a,b]$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x\right|$$

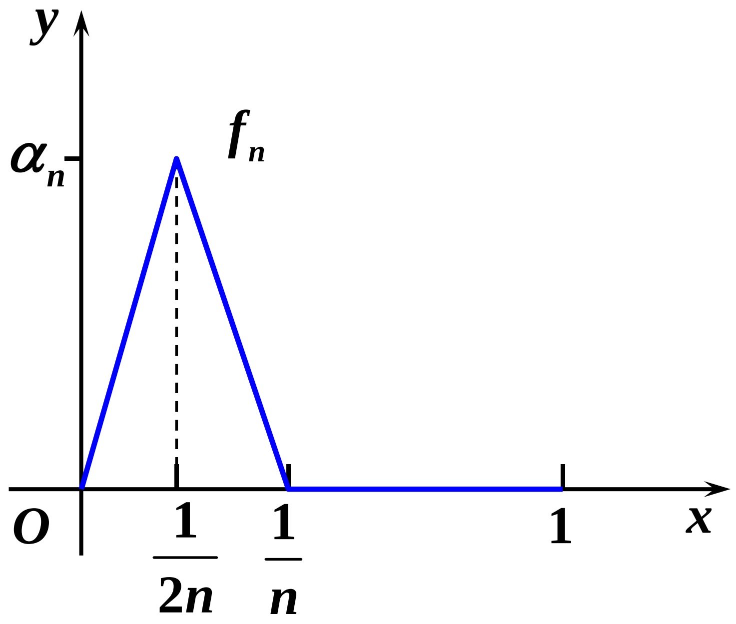
$$\le \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right|\mathrm{d}x \le \varepsilon(b-a),$$ 这就证明了等式。

这个定理指出：在一致收敛的条件下，极限运算与积分运算的顺序可以交换.

例1 设函数

$$f_n(x)=\begin{cases}2n\alpha_n x, & 0\le x<\dfrac{1}{2n},\\ 2\alpha_n-2n\alpha_n x, & \dfrac{1}{2n}\le x<\dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n}\le x\le 1,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

(其图象如图所示).



显然$\{f_n(x)\}$是$[0,1]$上的连续函数列, 且对任意$x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

又 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\alpha_n$, 因此$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0 的充要条件是 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$.

又因$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\alpha_n}{2n}$, 故 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{2n}=0$. 这样, 当$\alpha_n\equiv 1$时, 虽然$\{f_n(x)\}$不一致收敛于$f(x)$, 但定理 13.10 的结论仍成立. 但当$\alpha_n\equiv n$时, $\{f_n(x)\}$不一致收敛于$f(x)$.

同时 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\equiv\dfrac{1}{2}$也不收敛于$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

例1说明当$\{f_n(x)\}$收敛于$f(x)$时，一致收敛性是极限运算与积分运算交换的充分条件, 不是必要条件.

可微性定理

定理13.11(可微性) $\{f_n(x)\}, x \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{r} \{f_n(x_0)\}\text{收敛} \\ \{f_n'(x)\}\text{每一项都连续} \\ \{f_n'(x)\}\text{一致收敛} \end{array}\right\} \Rightarrow \{f_n(x)\}\text{收敛, 且}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

可微性定理

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=A,\quad f_n'(x)\rightrightarrows g(x)(n\to\infty)$

下面证明函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛, 且其极限

函数的导数存在且等于 g.

由定理条件, 对任一 $x\in[a,b]$, 总有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n\to\infty$ 时, 右边第一项极限为 A, 第二项极限为

$\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. 所以上式左边极限存在, 记为 f, 于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=A+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t.$$

由 g 的连续性及微积分学基本定理得

$$f' = g.$$

这就证明了等式(4).

注 请注意定理中的条件 x_0 为 $\{f_n\}$ 的收敛点的作用.

在定理的条件下, 还可推出在 $[a, b]$ 上函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 请读者自己证明.

与前面两个定理一样, 一致收敛是极限运算与求导运算交换的充分条件, 而不是必要条件, 请看下例.

例2 函数列

$$f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2),\quad n=1,2,\cdots$$

与

$$f_n'(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots$$

在 $[0,1]$ 上都收敛于0，由于

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}|f_n'(x)-f'(x)|=\frac{1}{2},$$

所以导函数列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，但有

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0=[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'.$$

在上述三个定理中，我们都可举出函数列不一致收敛但定理结论成立的例子. 在今后的进一步学习中(如实变函数论)将讨论使上述定理成立的较弱条件，但在目前情况下，只有满足一致收敛的条件，才能保证定理结论的成立.