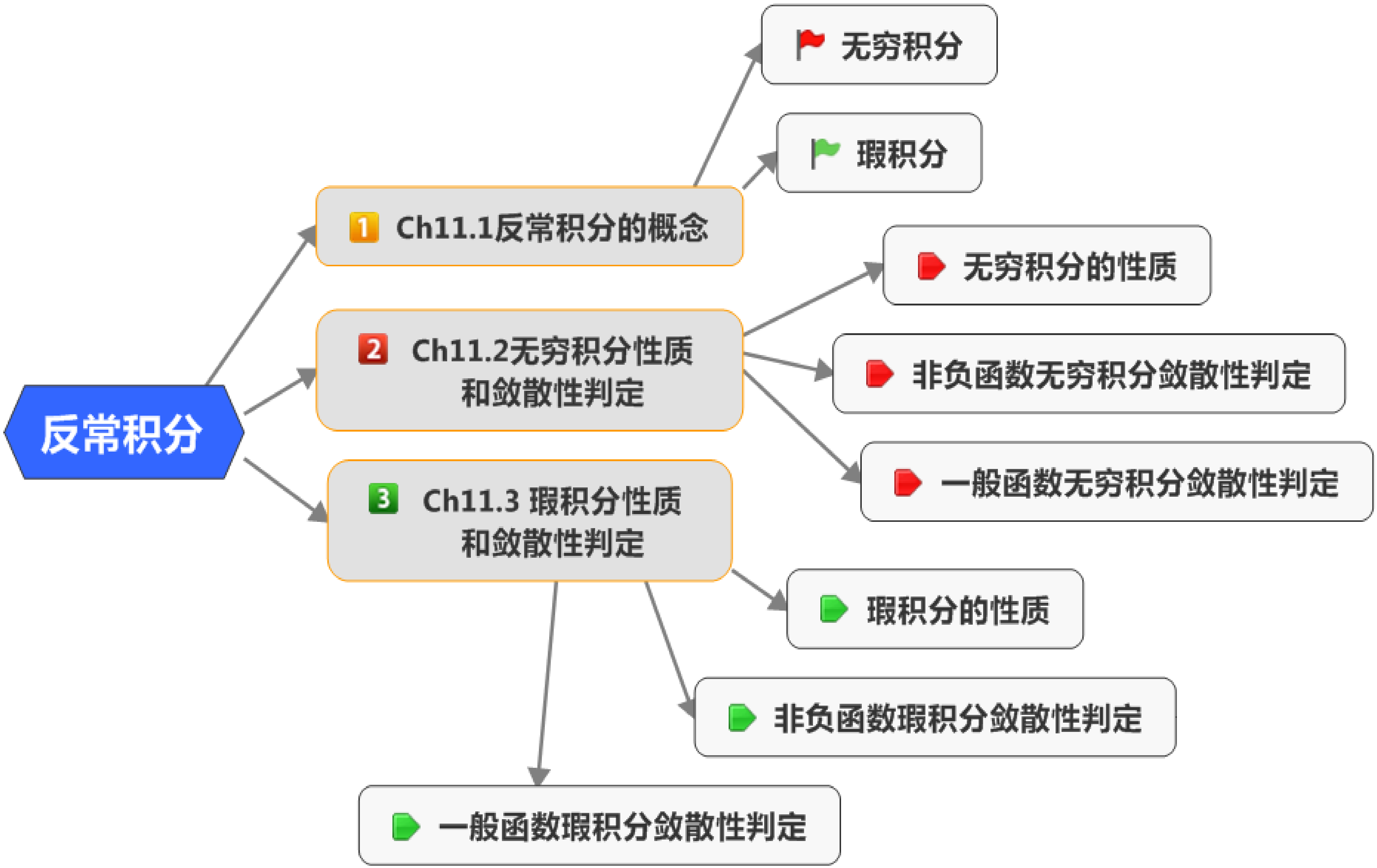
第十一章 反常积分



反常积分
Ch11.1反常积分的概念
无穷积分
瑕积分
Ch11.2无穷积分性质和敛散性判定
无穷积分的性质
非负函数无穷积分敛散性判定
一般函数无穷积分敛散性判定
Ch11.3 瑕积分性质和敛散性判定
瑕积分的性质
非负函数瑕积分敛散性判定
一般函数瑕积分敛散性判定

§2 无穷积分的性质及收敛判别

本节讨论无穷积分的性质，并用这些性质得到无穷积分的收敛判别法.

一、无穷积分的性质

二、非负函数无穷积分的收敛判别法

三、一般函数无穷积分的收敛判别法

一、无穷积分的性质

定理11.1 (无穷积分收敛的柯西准则) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists G \geq a,$ 当 $u_1, u_2 > G$ 时,

$$\left| \int_a^{u_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

证 设 $F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x,\ u \in [a, +\infty)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在极限 $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u)$. 由函数极限的柯西准则, 此等价于

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists G > a,\ \forall u_1, u_2 > G,\ \left| F(u_1) - F(u_2) \right| < \varepsilon,$

即

$$\left| \int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

根据反常积分定义, 容易导出以下性质1 和性质2.

性质1 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, k_1, k_2 为任意常数, 则

$$\int_a^{+\infty} \big(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\big)\mathrm{d}x$$

也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}\left(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质2 若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\ (\forall b>a),$$

同时收敛或同时发散，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

例1 若 $f(x)\le h(x)\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$, $f(x), g(x), h(x)$ 在任意 $[a, u]$上可积, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 则 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 因为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

收敛, 由柯西准则的必要性,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists G > a, \forall u_1 > u_2 > G,$$

$$\left|\int_{u_2}^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x) \le h(x) \le g(x)$, 所以

$$-\varepsilon < \int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x \le \int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x \le \int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

再由柯西准则的充分性, 证得 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

二、非负函数无穷积分的收敛判别法

定理11.2（非负函数无穷积分的判别法） 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 f 在任何 $[a,u]$ 上可积, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是: $\exists M>0$, 使

$$\forall u\in[a,+\infty),\ \left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right|\le M.$$

证 设 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u)$ 存在. 由于 $f(x)\ge 0$, 当 $u_1<u_2$ 时,

$$\int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\ge 0,$$

从而 $F(u)$ 是单调递增的 $(u\in[a,+\infty))$. 由单调递增函数的收敛判别准则, $\lim\limits_{u\to+\infty}F(u)$ 存在的充要条件是 $F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 即 $\exists M>0$, 使

$$\forall\, u\in[a,+\infty),\ \text{有}\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right|\le M.$$

定理11.3 (比较判别法) 设定义在 $[a,+\infty)$上的两个非负函数 f, g 在任何有限区间$[a, u]$上可积, 且存在 $G>a$, 满足

$$f(x)\le g(x),\ x\in[G,+\infty),$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 亦收敛;

当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 亦发散.

证 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\exists M>0, \forall u\in[a,+\infty)$,

$$\int_a^u g(x)\mathrm{d}x \le M.$$

因此 $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^u g(x)\mathrm{d}x \le M.$

由非负函数无穷积分的判别法, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

第二个结论是第一个结论的逆否命题, 因此也成立.

例2 判别 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 的收敛性.

解 显然 $\frac{1}{\sqrt[5]{x^6+1}}\le\frac{1}{x^{6/5}}$. 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{6/5}}$ 收敛, 因此

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 收敛.

例3 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

证 由于 $f(x)g(x) \le \dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$, 而

$$\int_a^{+\infty} \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$$

收敛, 因此 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

推论1 设非负函数 f 和 g 在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

(i) 若 $0 < c < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性相同;

(ii) 若$c=0$, 则由$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛可得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(iii) 若$c=+\infty$, 则由$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散可得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

证 (i) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c>0$, 故存在$G>a$, 使$\forall\ x>G$, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\frac{c}{2},$$

即

$$\frac{c}{2}g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}g(x).$$

若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则可得$\int_a^{+\infty}\frac{c}{2}g(x)\mathrm{d}x$收敛,从而$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛.反之,若$\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$收敛,可得$\int_a^{+\infty}\frac{3c}{2}g(x)\mathrm{d}x$收敛,从而$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(ii)由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,存在$G>a$,使$\forall x>G$,有

$$\frac{f(x)}{g(x)}<1,$$

即 $f(x)<g(x)$, $x\in[G,+\infty)$,因此由$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛可推得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(iii) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, 存在 $G>a$, 使 $\forall\, x>G$, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>1,$$

即 $f(x)>g(x),\ x\in[G,+\infty)$, 因此由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推得 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论2 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积.

(i) 若 $f(x)\le\dfrac{1}{x^p}\,(p>1)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $f(x) > \dfrac{1}{x^p}$ $(p \le 1)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论3 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数,在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$,则

(i) 当 $p > 1$, $0 \le \lambda < +\infty$ 时, $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $p \le 1$, $0 < \lambda \le +\infty$ 时, $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

说明: 推论3是推论2的极限形式，读者应不难写出它的证明.

例4 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性 $(k>0)$.

解 (i) $p>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0.$

因此由推论3知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) $p\le 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-p}\ln^k x=+\infty.$

因此同理知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

三、一般函数无穷积分的判别法

若无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

以下定理可用来判别一般函数无穷积分的收敛性.

定理11.4（绝对收敛的无穷积分必收敛）若 f 在任何有限区间 $[a, u]$上可积, 且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 亦必收敛, 并且

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证 因 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 由柯西准则的必要性, 对

$\forall\varepsilon>0, \exists G>a,$ 当 $u_2>u_1>G$ 时, $\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,$

因此 $$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

再由柯西准则的充分性, 推知 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

又对任意 $u>a,$ $\left|\int_a^{u}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^{u}|f(x)|\mathrm{d}x,$ 于是

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|=\lim_{u\to+\infty}\left|\int_a^{u}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

例5 判别 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} \mathrm{d}x \quad (a>0)$ 的收敛性.

解　由于 $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \mathrm{d}x$ 收敛,

因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} \mathrm{d}x$ 绝对收敛.

收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不一定是绝对收敛的.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

一般函数的无穷积分还可试用以下的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法判别其收敛性.

定理11.5（狄利克雷判别法） 若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证　设 $u\in[a,+\infty)$, $\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right|\le M$. $\forall\varepsilon>0$, 由于

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0,$$

故 存在 $G\ge a$, $x>G$ 时，$|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$.

因 g 为单调函数,由积分第二中值定理,对任意的 $u_2 > u_1 > G$,$\exists \xi \in [u_1, u_2]$, 使得

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le |g(u_1)|\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(u_2)|\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= |g(u_1)|\left|\int_{a}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$+ |g(u_2)|\left|\int_{a}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon.$$

因此, 由柯西准则, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理11.6 (阿贝尔判别法) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 [证法1]　设 $|g(x)| \le M$, $x \in [a,+\infty)$, 由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists G \ge a$, 当 $u_2 > u_1 > G$,

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

由 g 的单调性, 用积分第二中值定理，对于任意的 $u_2 > u_1 > G$, $\exists \xi \in [u_1, u_2]$, 使得

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\,dx = g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx.$$

因此

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le |g(u_1)|\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(u_2)|\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

由柯西准则, $\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

[证法2]　因 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,故存在 A 使

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = A.$$

令 $g_1(x) = g(x) - A$,则 $g_1(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调趋于 0.

又因 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在

$[a,+\infty)$上有界, 由狄利克雷判别法$\int_a^{+\infty} f(x)\,g_1(x)\mathrm{d}x$

收敛, 所以

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)\mathrm{d}x + A\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

例6 讨论$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\,(p>0)$ 的收敛性.

解 当$p>1$时, 由于 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$, 因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对

收敛.

若 $0 < p \leq 1$, 则当 $u \geq 1$ 时

$$\left|\int_1^u \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \left|\cos 1 - \cos u\right| \leq 2,$$

而 $\dfrac{1}{x^p}$ 单调趋于 0，因此 由狄利克雷判别法推知

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 另一方面，

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},\ x \in [1, +\infty),$$

其中 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ 满足狄利克雷判别

法条件, 是收敛的；而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散，因此

$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 总之,

当 $0 < p \le 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛;

当 $1 < p < +\infty$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

类似可证:

当 $0 < p \le 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛;

当 $1 < p < +\infty$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

复习思考题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,是否一定存在 $\varepsilon>0, M>a$,使 $x^{1+\varepsilon} f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上有界?

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 试问此时是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

3. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 能否推得 $\int_a^{+\infty} f^3(x)\mathrm{d}x$ 收敛? 反之呢?

4. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,是否必有 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛?