第十章 定积分的应用

§10.1 平面图形的面积

本节介绍用定积分计算平面图形在各种表示形式下的面积.

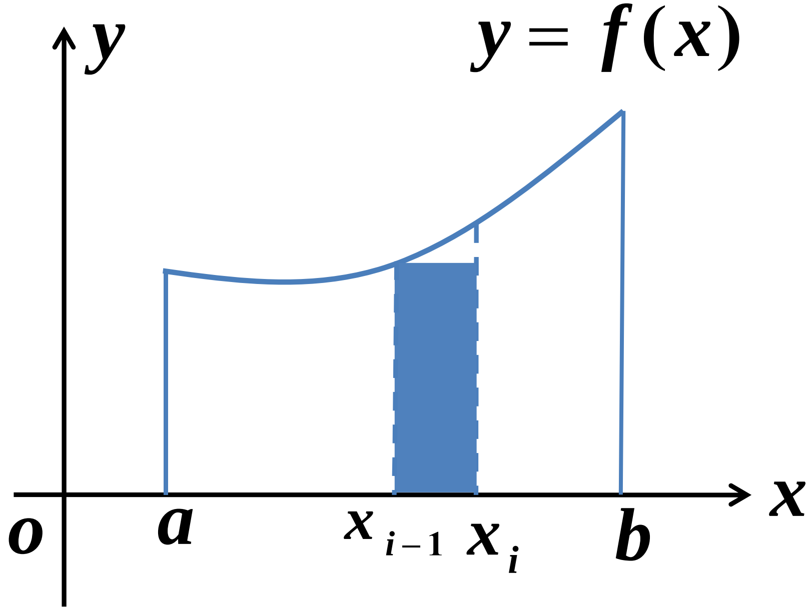
一、直角坐标方程表示的平面图形的面积

二、参数方程表示的平面图形的面积

三、极坐标表示的平面图形的面积

一、再论曲边梯形的面积

$y = f(x)$为$[a,b]$上的非负连续函数

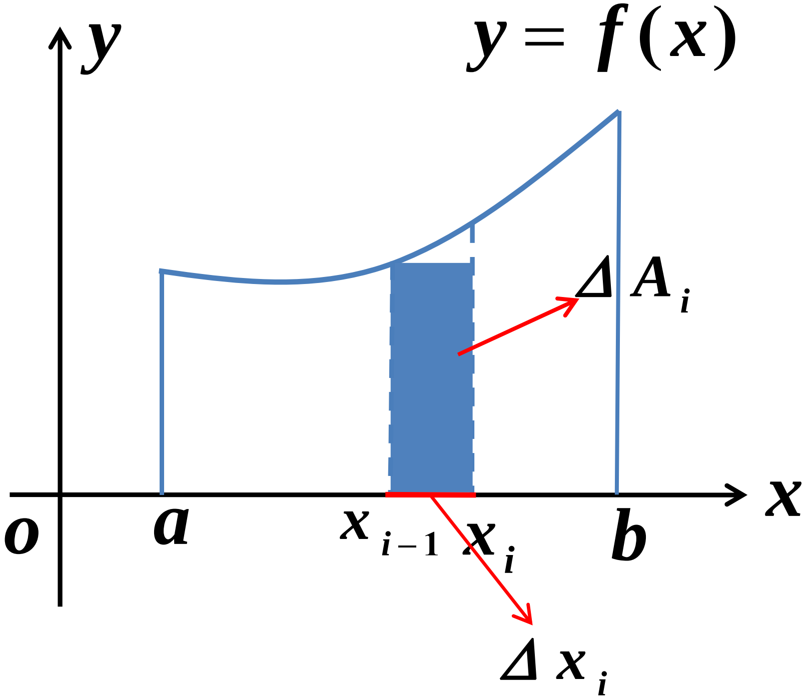


中心思想：

把曲边梯形看作许许多多小的曲边梯形之和，每个小曲边梯形面积，可近似地用矩形的面积来替。

一、再论曲边梯形的面积

$y = f(x)$为$[a,b]$上的非负连续函数



(1)分割：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

(2)近似代替：$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3)求和：$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(4)取极限：$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

上述做法蕴含了两个实质性的问题

(1) 所求的量 A 对于$[a,b]$具有可加性.

(2)用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似 ΔA_i， 误差应是 Δx_i 的高阶无穷小，只有这样，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限才是精确值 A， 故关键是确定

$$\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Delta A_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = o(\Delta x_i)$$

二、微元法（元素法）

1、能用定积分计算的量U满足的条件：

(1) U与变量x的变化区间$[a,b]$有关.

(2) U对于$[a,b]$具有可加性.

(3) U的部分量ΔU_i可近似表示成 $f(\xi_i)\Delta x_i$，误差是比Δx_i高阶的无穷小量 .

2、用定积分计算量U的步骤：

(1) 根据问题，选择合适的变量 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$

(2) 设想将 $[a,b]$ 分成若干个小区间，取其中的任一小区间 $[x,x+dx]$，求出它所对应的部分量 ΔU 的近似值 $\Delta U \approx \underline{f(x)dx \ = dU}$.

(3) 以 U 的元素 dU 作积分表达式，以 $[a,b]$ 为积分区间，得 $U=\int_a^b f(x)dx$.

微元法（元素法）

三、平面图形的面积

用定积分求由直角坐标方程表示的平面图形的面积, 通常把它化为 x 型和 y 型区域上的积分来计算.

x 型区域: $A=\{(x,y)\,|\,f_1(x)\le y\le f_2(x), x\in[a,b]\}$,

其中 $f_1(x), f_2(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数.

y 型区域: $B=\{(x,y)\,|\,g_1(y)\le x\le g_2(y), y\in[c,d]\}$,

其中$g_1(y), g_2(y)$ 是定义在$[c,d]$上的连续函数.

三、直角坐标系下平面图形的面积

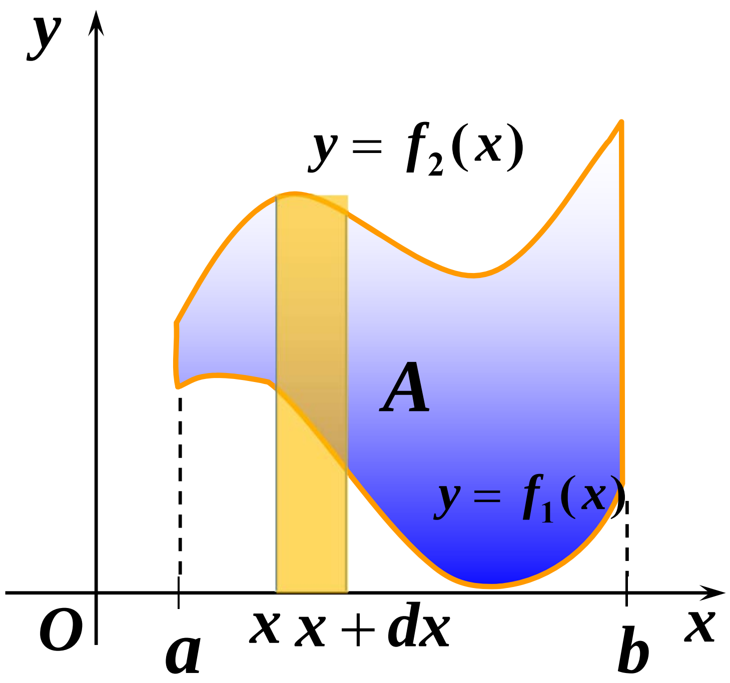
x 型区域： $A=\{(x,y)\mid f_1(x)\le y\le f_2(x), x\in[a,b]\}$,

其中 $f_1(x), f_2(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数.

$\forall[x,x+dx]\subset[a,b]$

$$dS=[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

$$S(A)=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$



三、直角坐标系下平面图形的面积

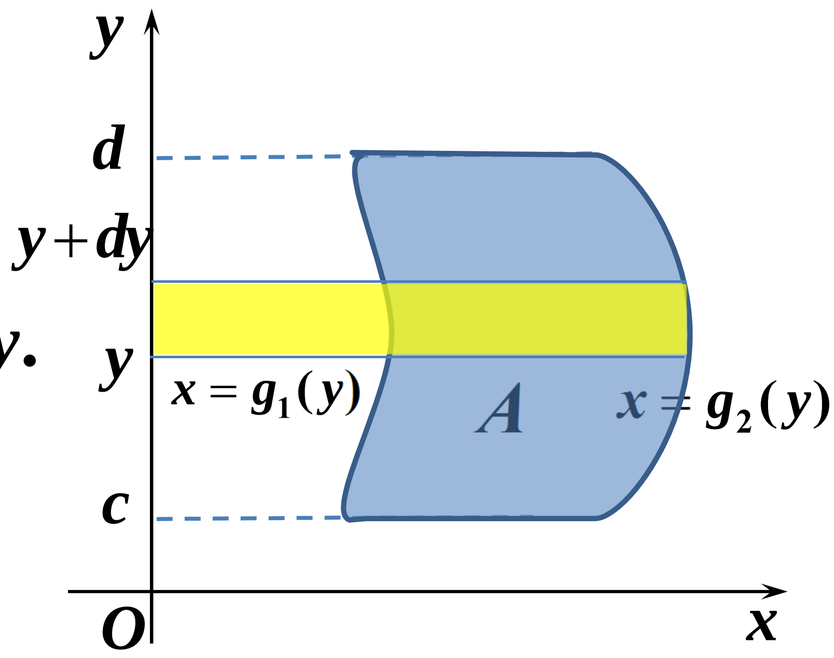
y型区域：$B=\{(x,y)\,|\,g_1(y)\le x\le g_2(y), y\in[c,d]\}$,

其中$g_1(y),g_2(y)$是定义在$[c,d]$上的连续函数.

$\forall[y,y+dy]\subset[c,d]$

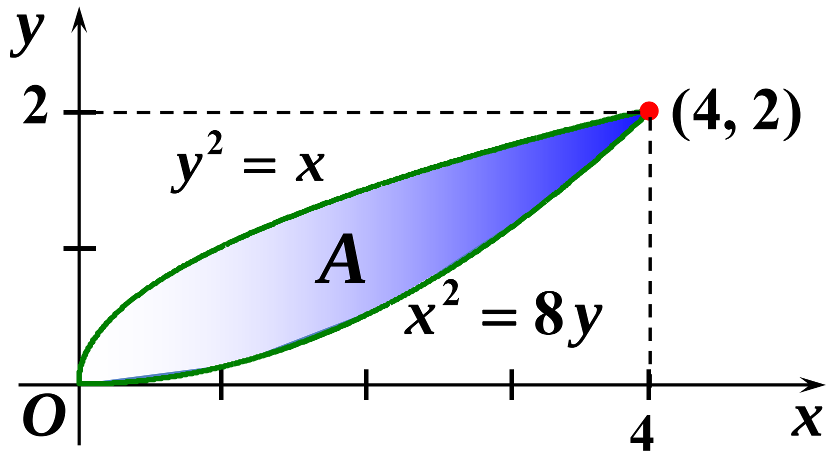
$dS=[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y$

$S(B)=\int_c^d[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y.$



例1 求由抛物线 $y^2=x$ 和 $x^2=8y$ 所围图形A的面积.

解 $\begin{cases} y^2=x \\ x^2=8y \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=2 \end{cases}$.



$$S(A)=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{24}x^3\Big|_0^4=\frac{16}{3}-\frac{64}{24}=\frac{8}{3}$$

把 A 看作为 y 型区域, 则 $g_1(y) = y^2$, $g_2(y) = \sqrt{8y}$,

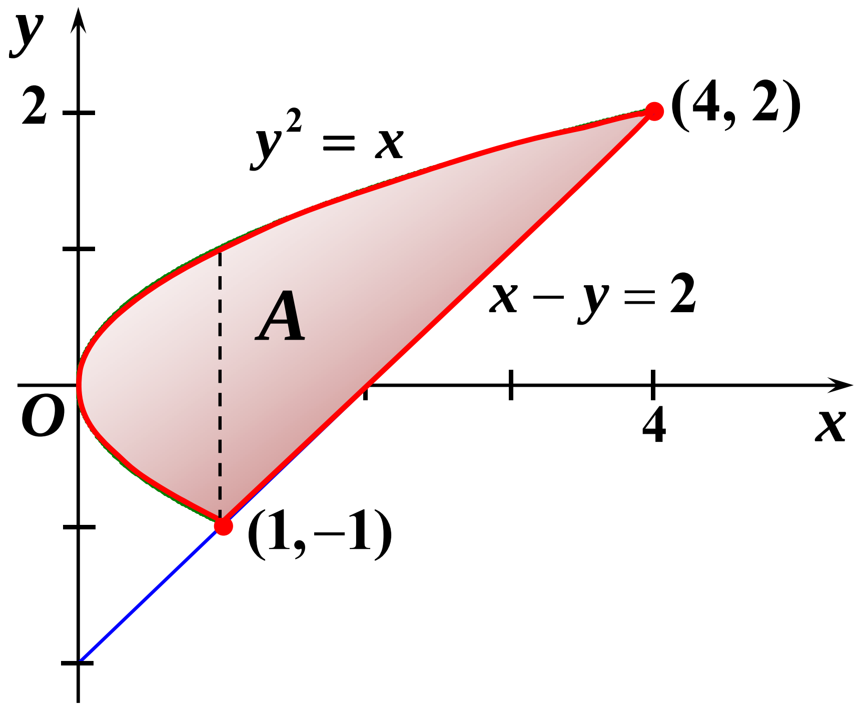
于是

$$S(A) = \int_0^2 \left(\sqrt{8y} - y^2\right) \mathrm{d}y = \left(\sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{3}\right) \Bigg|_0^2$$

$$= \sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

例2 求由 $y^2 = x$ 和 $x - y = 2$ 围成的图形 A 的面积.

解 $y^2 = x$ 和 $x - y = 2$ 的交点为 $(1,-1)$ 和 $(4,2)$. 图形 A 如下图.



若把 A 看作 x 型区域, 则

$$f_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ x - 2, & 1 \le x \le 4 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4.$$

由于 f_1 分段定义, A 分为二图形 A_1 和 A_2,

$$S(A_1)=\int_0^1\left(\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

$$S(A_2)=\int_1^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^4=\frac{14}{3}-\frac{3}{2}.$$

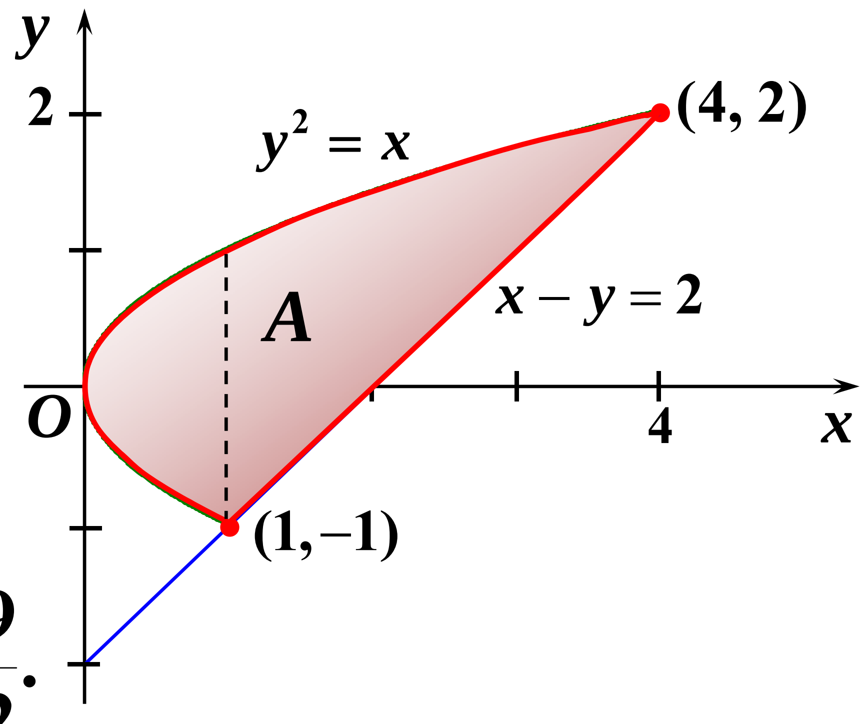
则

$$S(A)=S(A_1)+S(A_2)=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

若把 A 看作为 y 型区域，则

$$g_1(y) = y^2 \ (-1 \le y \le 2),$$

$$g_2(y) = y + 2 \ \ (-1 \le y \le 2).$$



$$S(A) = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2]\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

显然, 由于 $g_1(y)$, $g_2(y)$ 不是分段定义的函数, 比较容易计算.

三、参数方程表示的平面图形的面积

设曲线C由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 表示,

其中 $y(t)$ 连续, $x(t)$ 连续可微, $x'(t) \neq 0$.

若 $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调增, 则

由曲线 C 及直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴所围图形的面积为

$$S(A) = \int_a^b |y| \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta |y(t)| x'(t) \mathrm{d}t.$$

若 $x(\beta)=a$, $x(\alpha)=b$, $x(t)$在 $[\alpha,\beta]$ 上单调减时,

$$S(A)=\int_a^b |y|\,\mathrm{d}x=-\int_\alpha^\beta |y(t)|\,x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

因此, 不论 $x(t)$递增或递减,

$$S(A)=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

若上述曲线C 是封闭的，即

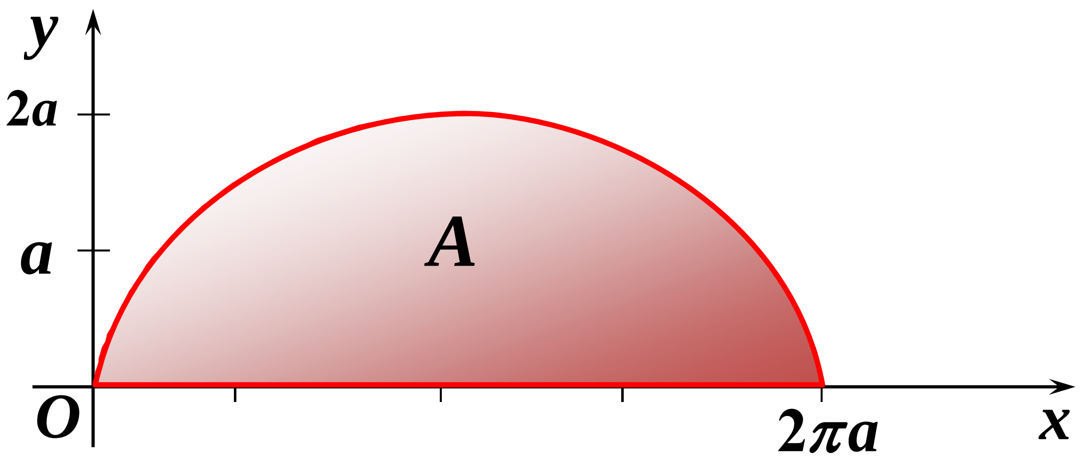
$$x(\alpha)=x(\beta),\ y(\alpha)=y(\beta),$$

则由C所围的平面图形A的面积同样是

$$S(A)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|y(t)x'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

$$\left(\text{或 } S(A)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|x(t)y'(t)\right|\mathrm{d}t\right).$$

例3 求由摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴所围图形的面积.

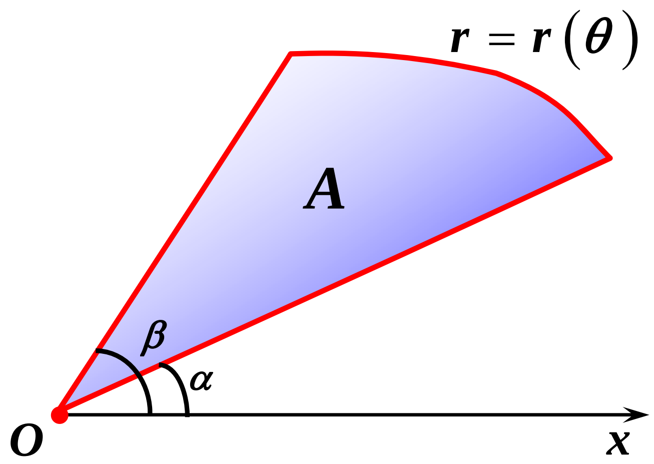


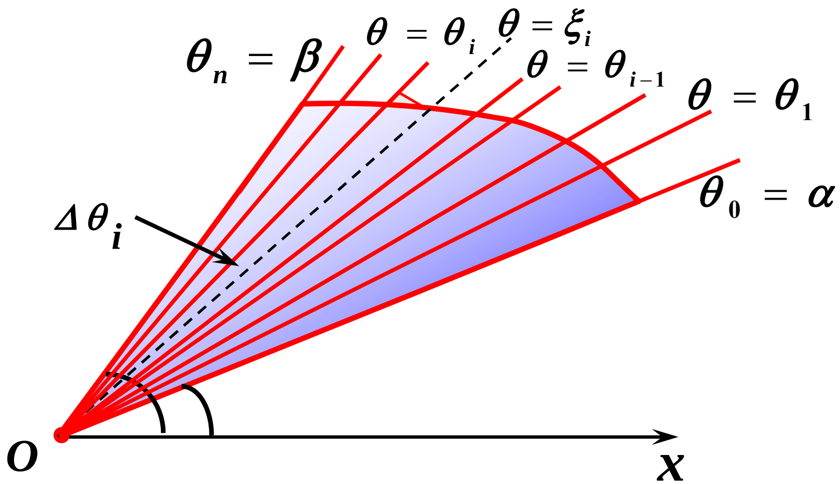
解 $$S(A) = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)[a(t - \sin t)]' \mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

四、极坐标表示的平面图形的面积

设曲线C的极坐标方程为$r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$. 图形 A 由曲线 C 和两条射线$\theta=\alpha$与$\theta=\beta$围成.

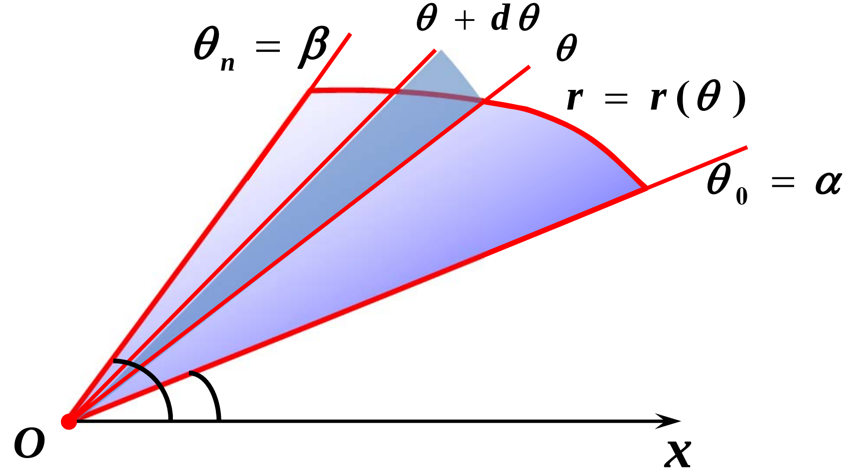




作分割T: $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$, 射线$\theta = \theta_i \left(i = 1, 2, \cdots, n \right)$把扇形$A$分割成 n 个小扇形

(1) 取 θ 为积分变量，变化区间 $[\alpha,\beta]$

(2) 设想将 $[\alpha,\beta]$ 分成若干个小区间，取任一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$，求出.



$$dA=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

(3) 面积为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

2 公式背后的数学故事

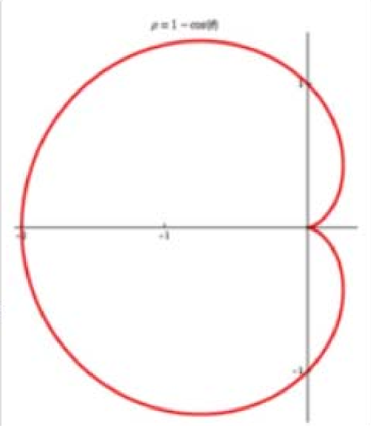
欧洲大陆爆发黑死病时笛卡尔流浪到瑞典，邂逅了聪明伶俐的克里斯汀公主，他们彼此产生爱慕之心，公主的父亲国王知道后勃然大怒，下令将笛卡尔流放回法国。笛卡尔回到法国后不久便染上重病，他在写给克里斯汀的最后一封信中只有短短的一个公式：$r=a(1-\sin\theta)$。国王和大臣们看到信后都不懂其中的含义，只好交给公主，公主看到后马上着手把方程的图形画出来，解开了这行字的秘密，这就是著名的心形线。当讲完这个故事学生们总是兴致勃勃地想去了解这个心形线的画法，从而达到掌握极坐标系下曲线的画法的要求。

故事

《数学的故事》里面说到了数学家笛卡尔的爱情故事。笛卡尔于1596年出生在法国，欧洲大陆爆发黑死病时他流浪到瑞典，

1649年，斯德哥尔摩的街头，52岁的笛卡尔邂逅了18岁的瑞典公主克里斯汀。几天后，他意外的接到通知，国王聘请他做小公主的数学老师。跟随前来通知的侍卫一起来到皇宫，他见到了在街头偶遇的女孩子。从此，他当上了小公主的数学老师。

小公主的数学在笛卡尔的悉心指导下突飞猛进，笛卡尔向她介绍了自己 研究的新领域--直角坐标系。每天形影不离的相处使他们彼此产生爱慕之心，公主的父亲国王知道了后勃然大怒，下令将笛卡尔处死，小公主克里斯汀苦苦哀求后，国王将其流放回法国，克里斯汀公主也被父亲软禁起来。



心形线(4张)

笛卡尔回法国后不久便染上重病，他日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯汀一直没收到笛卡尔的信。笛卡尔在给克里斯汀寄出第十三封信后就气绝身亡了，这第十三封信内容只有短短的一个公式：r=a(1-sinθ）。国王看不懂，觉得他们俩之间并不是总是说情话的，将全城的数学家召集到皇宫，但没有一个人能解开，他不忍心看着心爱的女儿整日闷闷不乐，就把这封信交给一直闷闷不乐的克里斯汀。

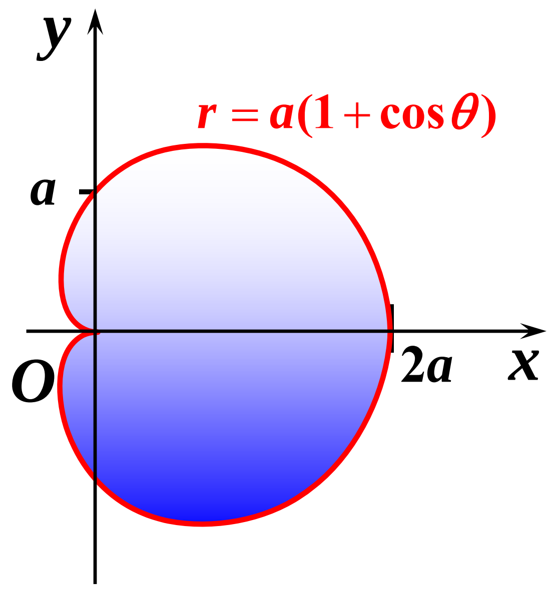
公主看到后，立即明了恋人的意图，她马上着手把方程的图形画出来，看到图形，她开心极了，她知道恋人仍然爱着她，原来方程的图形是一颗心的形状。这也就是著名的“心形线”。

国王死后，克里斯汀登基，立即派人在欧洲四处寻找心上人，无奈斯人已故，先她一步走了，徒留她孤零零在人间...

据说这封享誉世界的另类情书还保存在欧洲笛卡尔的纪念馆里。 [1]

例4 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 所围平面图形的面积.

解



$$S(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$

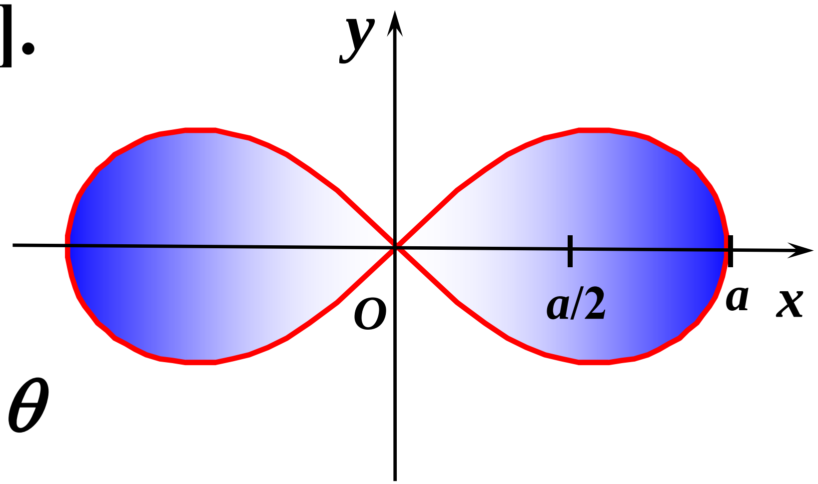
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2.$$

例4 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.

解 因为 $r^2 \geq 0$, 所以 θ 的取值

范围是 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 与 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.



由图形的对称性,

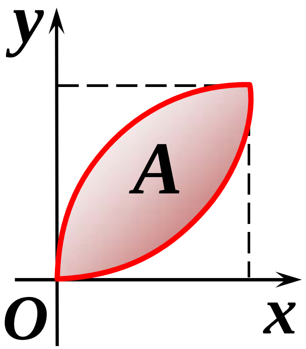
$$S(A) = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

例5 求由 $r=\sin\theta$, $r=\cos\theta$ 所围图形 A 的面积.

解 $$S(A)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta.$$



$$=\frac{1}{4}\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

注 也可利用对称性.