6.3 函数依赖集的闭包与属性集的闭包

☞ 函数依赖集的闭包

- **定义：** 在关系模式*R*<*U*，*F*>中为*F*所逻辑蕴含的函数依赖的全体叫作 *F*的闭包(Closure)，记为F^+。

  例: 已知R<U, F>，其中U＝{A, B, C}，F={A→B, B→C}，求关系模式R上的函数依赖集F的闭包F$^+$。

  解： $F^+= \{ \Phi\to\Phi, A\to\Phi, A\to A, \ldots, AB\to A, \ldots$ //A1

  $A\to B, A\to AB, AB\to B, \ldots, ABC\to BC, \ldots$ //A2

  $B\to C, AB\to AC, \ldots\ldots$ //A2

  $A\to C \}$ //A3

  注：本题F$^+$共计43个不重复的FD。|F$^+$|属于NP完全问题

- **F$^+$的意义：** 包含了给定函数依赖集F(部分)所蕴涵的属性集U上的全部函数依赖。

- **缺点：** 这些依赖信息太多太庞杂，很难管理和利用。

6.3 函数依赖集的闭包与属性集的闭包

☞ 属性集的闭包

- **定义：** 设F为属性集U上的一组函数依赖，$X\subseteq U$，X关于函数依赖集F的闭包(Closure of X under F) $X_F^+=\{A \mid X\rightarrow A$能由$F$根据Armstrong公理导出$\}$。

- **求X_F^+的算法：**

  (1) 令$X^{(0)}=X$，$i=0$；

  (2) 令$X^{(i+1)}=X^{(i)}\cup\{A \mid (\exists V)(\exists W)(V\rightarrow W\in F\wedge V\subseteq X^{(i)}\wedge A\in W)\}$；

  (3) 若已没有$V\rightarrow W\in F$，使得$X^{(i+1)}\neq X^{(i)}$，算法结束，$X_F^+=X^{(i)}$；否则，令$i=i+1$，转(2)。

6.3 函数依赖集的闭包与属性集的闭包

例： 已知关系模式$R<U, F>$，其中$U=\{A, B, C, D, E\}$，F=$\{AB\rightarrow C, B\rightarrow D, C\rightarrow E, EC\rightarrow B, AC\rightarrow B\}$，求$(AB)_F^+$。

解：$(AB)_F^+ = \{ABCDE\}$

(1) $X \subseteq X_F^+$；

(2) 逐一考察F中的FD，如果存在$V\rightarrow W\in F$，且V中的全部属性都出现在当前的X_F^+中，将属性组W并入X_F^+；

(3) 当当前的X_F^+包含全部属性U，或者按(2)重新遍历F而没有对当前X_F^+增加任何属性时算法结束。

6.3 函数依赖集的闭包与属性集的闭包

- **定理：** 设F为属性集U上的一组函数依赖，X，$Y \subseteq U$，$X \to Y$能由F 根据Armstrong公理导出的充分必要条件是$Y \subseteq X_F^+$。

  证明：(充分性)设$Y = A_1A_2\ldots A_m$, 且$Y \subseteq X_F^+$。由X_F^+的定义知$X \to A_i (i=1,\ldots,m)$能逻辑地推出，由合并规则得$X \to A_1A_2\ldots A_m$，即$X \to Y$。

  (必要性) 设$F \models X \to Y$，由分解规则，$X \to A_i (i=1,\ldots,m)$，由X_F^+的定义得$A_1A_2\ldots A_m \in X_F^+$，即$Y \subseteq X_F^+$。

  意义： 可以将庞杂的函数依赖集的闭包F^+等价地转换为多个属性集X关于F的闭包X_F^+，可以方便地处理。

- **定理：** Armstrong公理系统是有效的、完备的。

  有效性是指由F出发根据Armstrong公理推导的每一FD都在F^+中；**完备性**是指F^+中的每一FD都可以F出发根据Armstrong公理推导推导出来。(证明不作要求)