电子工程学院
School of Electronic Engineering,Xidian University

电磁场与电磁波

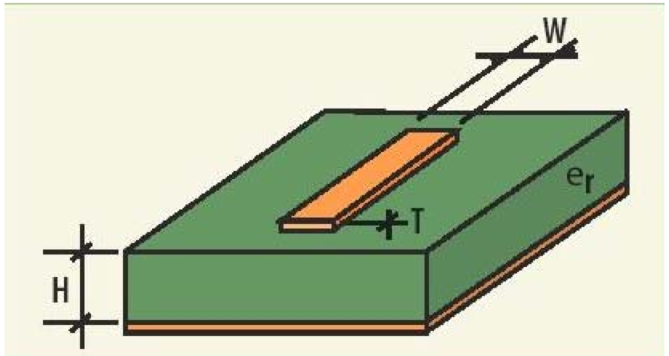
§ 导行电磁波

主讲人：王楠

电磁波除了在无限空间传播外，还可以在某种特定结构的内部或者周围传播，这些结构起着引导电磁波传输的作用，这种电磁波就称为导行电磁波，简称导波。

导波结构可以由金属材料构成，也可以由介质材料构成，还可以由金属和介质共同构成。

无限长的平行双导线、同轴线、金属波导、微带线等都是常用的导波结构。



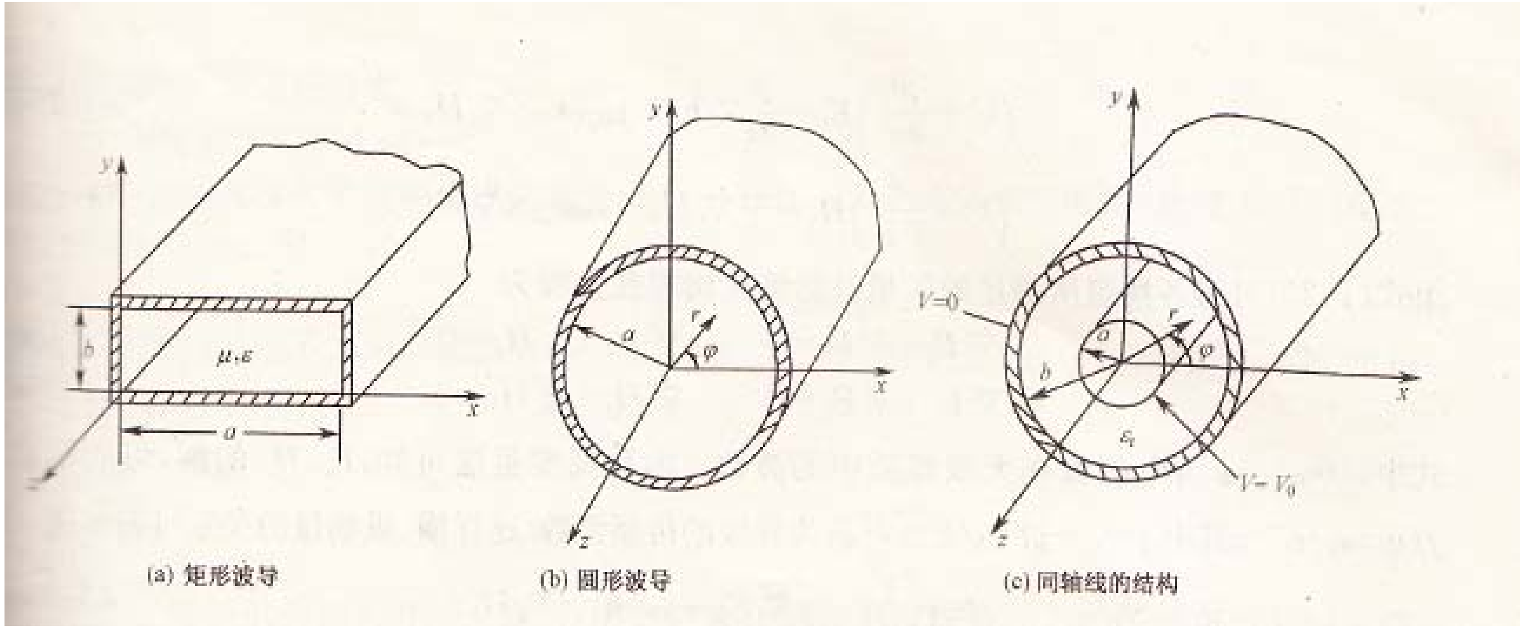
在不同导波结构上可以传输不同模式的电磁波。所谓不同模式的电磁波指的是在垂直于电磁波传播方向的横截面上具有不同的场分布，每一种场分布称为一种模式。

不同模式的电磁波本质上是满足特定边界条件的亥姆霍兹方程的一个解。我们可以据此得到在各种导波结构中各种模式电磁波的场分布和传输规律，进而对导波结构提出合理的设计要求。

我们首先对导波结构的“共性”，也就是传播方向的电磁场加以研究，然后再根据不同导波结构的不同截面进一步分析导行电磁波。

横向和纵向

波导系统强调截面的变化



传播方向→纵向

截面方向→横向

横向分量和纵向分量

令横截面上的二维坐标表示为 u_1, u_2 纵向表示为 z

$$\vec{E}(u_1,u_2,z)=E_1(u_1,u_2,z)\hat{u}_1+E_2(u_1,u_2,z)\hat{u}_2+E_3(u_1,u_2,z)\hat{z}$$

横向分量 $\vec{E}_t(u_1,u_2,z)=E_1(u_1,u_2,z)\hat{u}_1+E_2(u_1,u_2,z)\hat{u}_2$

纵向分量 $E_z(u_1,u_2,z)\hat{z}$

同样 $\vec{H}_t(u_1,u_2,z)=\vec{H}_t(u_1,u_2,z)+H_z(u_1,u_2,z)\hat{z}$

$$\nabla=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\hat{u}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\hat{u}_2+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla_t=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\hat{u}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\hat{u}_2$$

h_1, h_2 为拉梅系数

直角坐标$->u_1=x, u_2=y, h_1=h_2=1$

柱坐标$->u_1=r, u_2=\varphi, h_1=1, h_2=r$

理想导波系统的一般分析

问题出发点和假定条件

波导内部：传输电磁波+无源。

波导一般解的出发点是无源区频域的**Maxwell**方程组

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \end{cases}$$

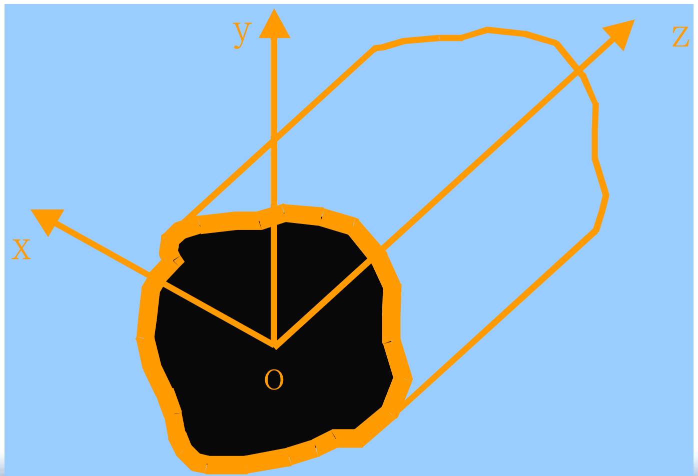
进一步假设波导具有以下条件：

1. 波导均匀条件：假定截面不随z而变化；

2. 媒质均匀条件：波导内 ε， μ 均匀，波导内壁σ无限大；

3. 无源条件：波导内 $\rho = 0,\quad \vec{J} = 0$

4. 无限条件：波导无限长。



理想导波系统中的电磁场，可以直接对麦克斯韦方程求解，也可以采用间接法利用辅助矢位函数或标位函数，使求解过程简化。或者采用纵向分量法使求解过程简化。

设我们所研究的导波系统由无限长理想导体和各向同性的理想介质构成。

从无源区Maxwell方程出发

出发点
无源区中
Maxwell方程

$\rightarrow$

支配方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$
$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0$$

$\rightarrow$

纵向分量方程

$$\nabla_t^2 E_z+k^2E_z=0$$
$$\nabla_t^2 H_z+k^2H_z=0$$

$\rightarrow$

其它分量用 E_z, H_z 表示

$$\begin{cases} E_x = f_1(E_z, H) \\ E_y = f_2(E_z, H) \\ H_x = f_3(E_z, H) \\ H_y = f_4(E_z, H) \end{cases}$$

波导一般解流图

横、纵场分量的关系

波导内部的电磁场遵循无源区的Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

从Maxwell方程组可得各场量满足的矢量及标量赫姆霍兹方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是电磁波在无限媒质中的波数

从无源区**Maxwell**方程即可得到各场量所满足矢量以及标量赫姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$$

把场的分量做如下假设，将z分量独立出来

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_t+\hat{z}E_z\\ \vec{H}=\vec{H}_t+\hat{z}H_z\\ \nabla=\nabla_t+\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}\end{cases}$$

下标t表示横向分量也即横截面上的坐标分量

$$\vec{E}_t=E_x\hat{x}+E_y\hat{y}$$

$$\nabla_t=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}$$

带入Maxwell方程，可得

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\vec{H}_t + \hat{z}H_z) = j\omega\varepsilon(\vec{E}_t + \boxed{\hat{z}E_z)}$$

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\vec{H}_t + \hat{z}H_z) = \boxed{\nabla_t \times \vec{H}_t} + \nabla_t \times(\hat{z}H_z) + \hat{z}\times\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z}$$

将横向和纵向分开

$$\begin{cases} \boxed{\nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega\varepsilon\hat{z}E_z} \\ \boxed{\nabla_t \times(\hat{z}H_z) + \hat{z}\times\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\vec{E}_t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t = j\omega\varepsilon\hat{z}H_z \\ \boxed{\nabla_t \times(\hat{z}E_z) + \hat{z}\times\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\vec{H}_t} \end{cases}$$

可以得到横向分量和纵向分量的关系方程

$$\begin{cases} j\omega\mu\vec{H}_t - \hat{z}\times\dfrac{\partial\vec{E}_t}{\partial z} = \nabla_t\times\left(\hat{z}E_z\right) \\ j\omega\varepsilon\vec{E}_t - \hat{z}\times\dfrac{\partial\vec{H}_t}{\partial z} = \nabla_t\times\left(\hat{z}H_z\right) \end{cases}$$

求解可以得到横向分量和纵向分量的关系式

$$\begin{cases} \left(k^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}_t = \dfrac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z + j\omega\mu\hat{z}\times\nabla_t H_z \\ \left(k^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{H}_t = \dfrac{\partial}{\partial z}\nabla_t H_z + j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_t E_z \end{cases}$$

接下来只需求解纵向分量E_z, H_z满足的方程

纵向分量的分离变量

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \\ \nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(u_1,u_2,z) = \vec{E}_t(u_1,u_2,z) + E_z(u_1,u_2,z)\hat{z}$$

$$\vec{H}_t(u_1,u_2,z) = \vec{H}_t(u_1,u_2,z) + H_z(u_1,u_2,z)\hat{z}$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

分离变量 $E_z(u_1,u_2,z) = f_1(u_1) f_2(u_2) Z(z)$

横向截面形状未定，无法进一步分解，因此暂时保留

$$E_z(u_1,u_2,z) = f(u_1,u_2) Z(z)$$

带入方程，整理之后可得

$$\frac{\nabla_t^2 f(u_1,u_2)}{f(u_1,u_2)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0$$

令 $\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \gamma^2$

$$\frac{\nabla_t^2 f(u_1,u_2)}{f(u_1,u_2)} + \gamma^2 + k^2 = 0$$

$$\boxed{\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \gamma^2}$$

$$\frac{\nabla_t^2 f(u_1,u_2)}{f(u_1,u_2)} + \gamma^2 + k^2 = 0$$

解之，可得

$$Z(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{+\gamma z}$$

正无穷远处，能量不能是无穷大，因此取负指数

$$E_z(u_1,u_2,z) = f(u_1,u_2)e^{-\gamma z}$$

$$E_z(u_1,u_2,z)=f(u_1,u_2)e^{-\gamma z}$$

纵向分量对纵向变量求导数

$$\frac{\partial E_z(u_1,u_2,z)}{\partial z}=f(u_1,u_2)\frac{\partial e^{-\gamma z}}{\partial z}$$

$$=(-\gamma)f(u_1,u_2)e^{-\gamma z}$$

$$=(-\gamma)E_z(u_1,u_2,z)$$

$$\boxed{\frac{\partial E_z}{\partial z}\leftrightarrow(-\gamma)E_z}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \leftrightarrow (-\gamma) E_z$$

横向分量与纵向分量之间的关系

$$\begin{cases} \left(k^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}_t = \dfrac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z + j\omega\mu\hat{z}\times\nabla_t H_z \\ \left(k^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{H}_t = \dfrac{\partial}{\partial z}\nabla_t H_z - j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_t E_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_c^2\vec{E}_t = (-\gamma)\nabla_t E_z + j\omega\mu\hat{z}\times\nabla_t H_z \\ k_c^2\vec{H}_t = (-\gamma)\nabla_t H_z - j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_t E_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2}\begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial E_z}{\partial u_1} \\ \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial E_z}{\partial u_2} \\ \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial H_z}{\partial u_1} \\ \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

横向分量用纵向分量表示

直角坐标—>$u_1 = x, u_2 = y, h_1 = h_2 = 1$

柱坐标—>$u_1 = r, u_2 = \varphi, h_1 = 1, h_2 = r$

导行波波型的分类

导行波的波型是指能够单独在导波系统中存在的电磁结构形式，也叫传输模式。

从前面的分析可知电磁场分为横向分量和纵向分量，横向分量可以用纵向分量表示，因此根据导向波是否存在纵向场对导行波的波型进行分类。

1、横电磁波（TEM波） *Transvers ElectroMagnetic*

$$E_z = 0$$

$$H_z = 0$$

2、横电波（TE波）或称磁波/（H波） *Transvers Electric*

$$E_z = 0$$

$$H_z \neq 0$$

所有场分量由纵向磁场分量求出

3、横磁波（TM波）或称电波/（E波） *Transvers Magnetic*

$$H_z = 0$$

$$E_z \neq 0$$

所有场分量由纵向电场分量求出

在某些特殊的场合，单独用**TE**波或**TM**波不能满足所有的边界条件，但他们的线性组合总能满足这些特殊要求，并且提供一个完整而普遍的解，这时的波称为混合波。

当然还有别的分类方法，但按上述方法分类的三种波形是最实用的。

非常感谢

下课

See you next time!