

电磁场与电磁波



均匀平面波向平面分界面的垂直入射

主讲人：王楠



前面我们讨论了均匀平面波在无界简单介质中的传播规律

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{a}_k \times \vec{E}, \quad \hat{a}_k \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = \hat{a}_x E_0 e^{-jkz}, \quad \vec{H} = \hat{a}_y \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}, \quad \hat{a}_z \cdot \vec{E} = 0$$

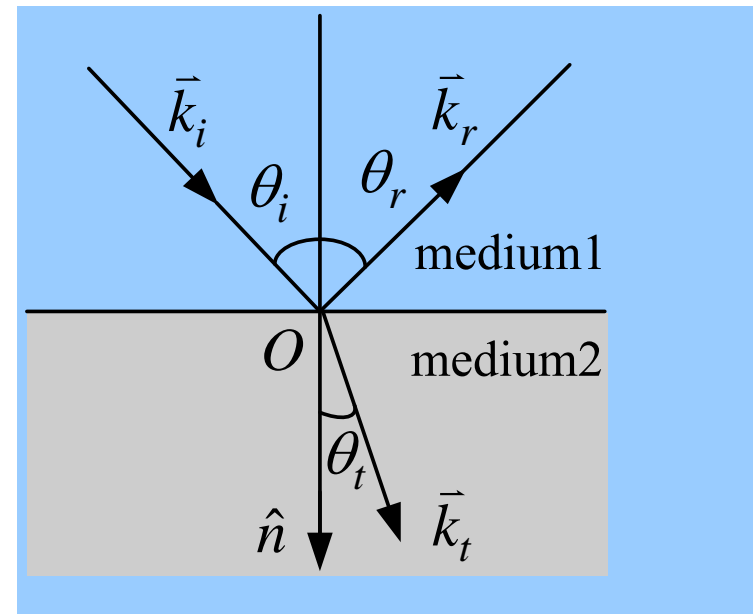
实际上，介质应该是有限的，在电磁波传播过程中遇到不同波阻抗的介质分界面时，在介质分界面上会有一部分能量被反射回来，形成反射波；还有一部分可能透过分界面继续传播形成透射波。



我们将要研究的问题是，已知入射波的频率、振幅、极化、传播方向、两种介质的参数，确定反射和透射的情况，进而研究两种介质中总的合成电磁波的传播规律和特性。

对于任意极化的入射波，都可以分解为两个相互垂直的线极化波，因此我们只需讨论线极化均匀平面波向无限大不同介质分界面垂直入射和斜入射的反射和透射问题。

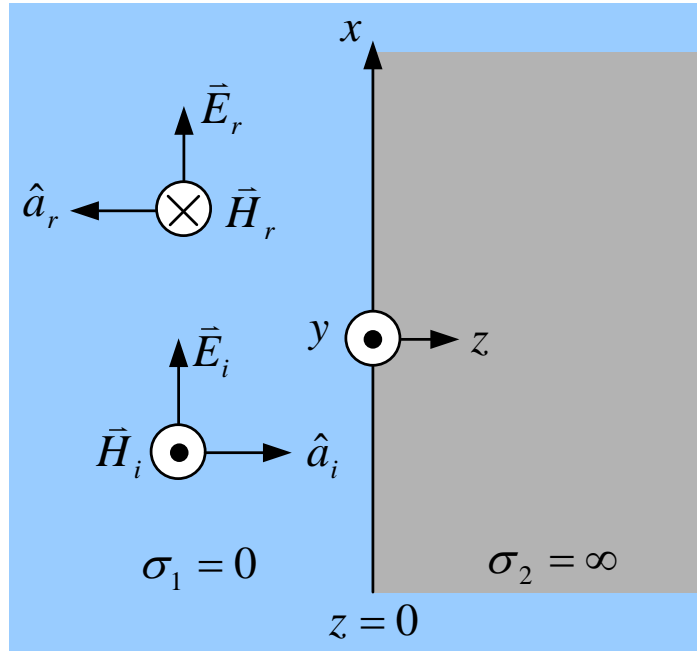
从比较简单的垂直入射开始研究。



平面波向理想导体的垂直入射



区域 1 中的场和区域 2 中的场



建立坐标系，将分界面置于坐标 $z = 0$ 处，设均匀平面波沿着 \hat{a}_z 方向垂直入射到界面上。

区域 2 为理想导体，其中的电场和磁场为零，因此入射电磁波不能透过界面而是完全被反射。

区域 1 填充无耗介质 $\mu_1, \epsilon_1, \sigma = 0$ ；

区域 2 为理想导体区域 $\mu_2, \epsilon_2, \sigma = \infty$

为了满足分界面上的边界条件，反射波与入射波应该有相同的频率和极化



区域 1 中的场分为两个部分

入射波

$$\vec{E}_i = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \hat{a}_y E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{k} = k_1 \hat{a}_z$$

E_{i0} 是 $z=0$ 处入射波的振幅

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

区域 2 中无场

反射波

$$\vec{E}_r = \hat{a}_x E_{r0} e^{jk_1 z}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{\eta_1} \hat{a}_y E_{r0} e^{jk_1 z}$$

$$\vec{k} = k_1 (-\hat{a}_z)$$

E_{r0} 是 $z=0$ 处反射波的振幅

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$



接下来研究 E_{i0} 和 E_{r0} 的关系

区域 1 中的总的合成电场为

$$\bar{E}_1(z) = \bar{E}_i(z) + \bar{E}_r(z) = \hat{a}_x (E_{i0} e^{-jk_1 z} + E_{r0} e^{jk_1 z})$$

根据 $z=0$ 处的边界条件

$$\bar{E}_1(0) = \hat{a}_x (E_{i0} + E_{r0}) = 0$$

引入反射系数 Γ ，定义为分界面上反射波电场强度与入射波电场强度之比

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}$$

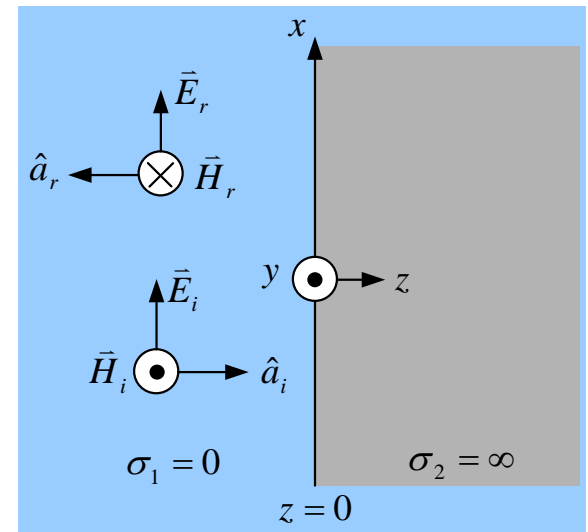
$$\Gamma = -1$$



$$\begin{aligned} \bar{E}_1(z) &= \hat{a}_x (E_{i0} e^{-jk_1 z} + \Gamma E_{i0} e^{jk_1 z}) = \hat{a}_x E_{i0} (e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) \\ &= -\hat{a}_x j 2 E_{i0} \sin k_1 z \end{aligned}$$

$$\bar{E}_i = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\bar{E}_r = \hat{a}_x E_{r0} e^{jk_1 z}$$

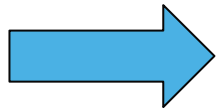


区域 1 中的总的合成磁场为

$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) = \frac{1}{\eta} \hat{a}_y (E_{i0} e^{-jk_1 z} + E_{r0} e^{jk_1 z})$$

反射系数

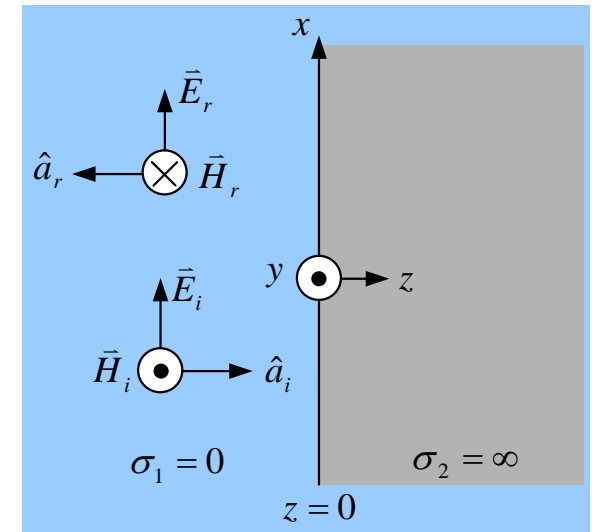
$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -1$$



$$\begin{aligned} \vec{H}_1(z) &= \frac{1}{\eta} \hat{a}_y (E_{i0} e^{-jk_1 z} - \Gamma E_{i0} e^{jk_1 z}) = \hat{a}_y E_{i0} (e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}) \\ &= \hat{a}_y 2 \frac{1}{\eta} E_{i0} \cos k_1 z \end{aligned}$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta} \hat{a}_y E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{\eta} \hat{a}_y E_{r0} e^{jk_1 z}$$



平面波垂直入射到导体界面时

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -1$$

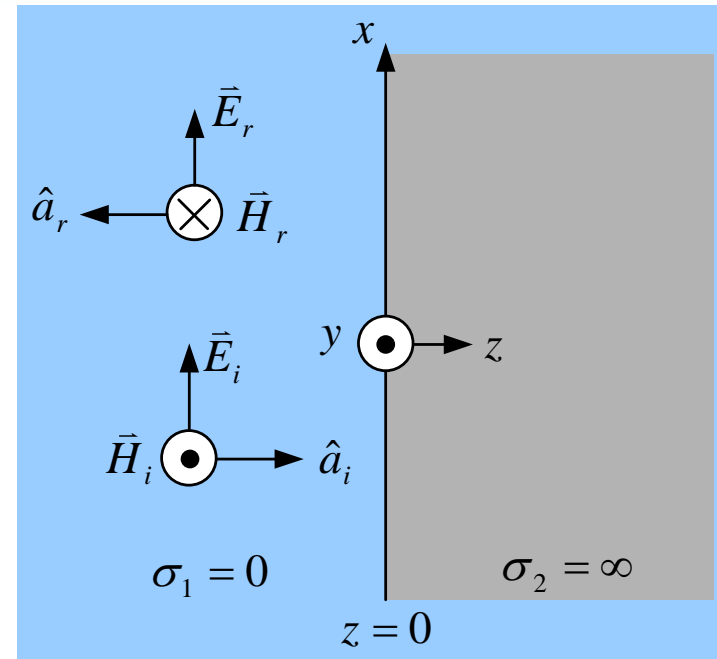
再次写出区域 1 中的总场

$$\bar{E}_1(z) = -\hat{a}_x j 2 E_{i0} \sin k_1 z$$

$$\bar{H}_1(z) = \hat{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z$$

瞬时值

$$\begin{cases} \bar{E}_1(z, t) = \text{Re}\{\bar{E}_1(z) e^{j\omega t}\} = \hat{a}_x 2 E_{i0} \sin k_1 z \sin \omega t \\ \bar{H}_1(z, t) = \text{Re}\{\bar{H}_1(z) e^{j\omega t}\} = \hat{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta} \cos k_1 z \cos \omega t \end{cases}$$



区域 1 中合成电磁波的时空特性

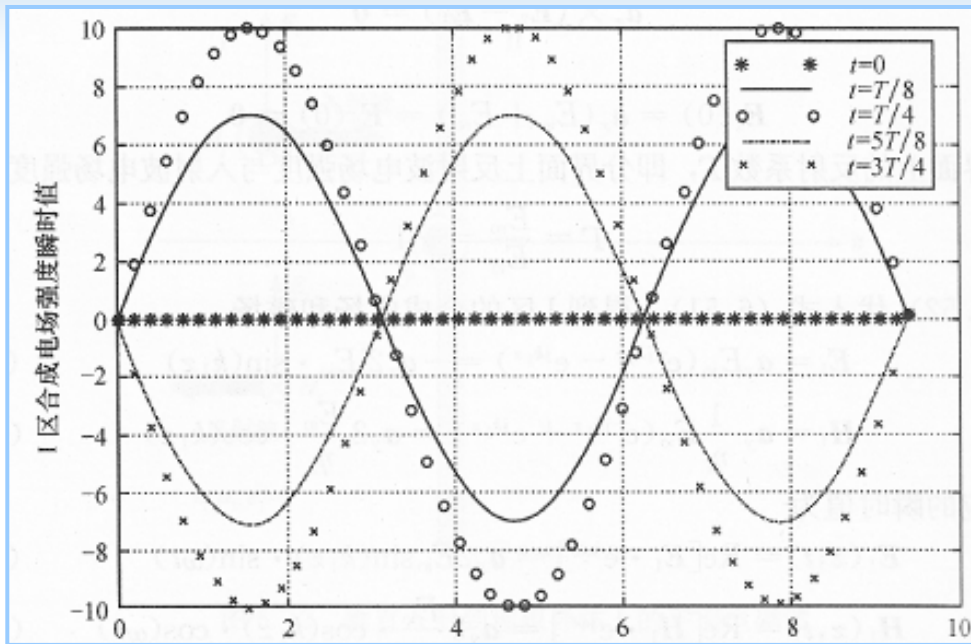
在理想导体平面前的合成波称为驻波，它有两个显著的特点。

➤ 波的零点和最大点固定不变，即波并不向前移动，而好像驻定在固定处。

$\bar{E}_1(z,t)$ 的零点 $\bar{H}_1(z,t)$ 的最大点	$\bar{E}_1(z,t)$ 的最大点 $\bar{H}_1(z,t)$ 的零点
$\begin{cases} k_1 z = -n\pi \\ z = -n\frac{\lambda}{2} \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\begin{cases} k_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2} \\ z = -(2n+1)\frac{\lambda}{4} \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \bar{E}_1(z,t) = \hat{a}_x 2E_{i0} \sin k_1 z \sin \omega t \\ \bar{H}_1(z,t) = \hat{a}_y 2\frac{E_{i0}}{\eta} \cos k_1 z \cos \omega t \end{cases}$$





这些最大值和最小值的位置不随时间变化，最大值的位置称为**波腹点**，最小值的位置称为**波节点**，这种波腹点和波节点**位置**固定不动的电磁波称为**驻波**。

两个振幅相等、传播方向相反的行波合成的结果是驻波。

相邻波腹和波节之间的距离是四分之一波长；

相邻波腹或波节之间的距离是二分之一波长。



➤ 驻波的平均Poynting矢量为0

驻波不传输能量，坡印亭矢量的时间平均值为

$$\bar{S}^{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[-\hat{a}_z j \frac{4E_{i0}^2}{\eta_1} \sin k_1 z \cos k_1 z \right] = 0$$

$$\bar{E}_1(z) = -\hat{a}_x j 2E_{i0} \sin k_1 z$$

$$\bar{H}_1(z) = \hat{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z$$

没有流动的实功率，只有虚功率。

坡印亭矢量的瞬时值

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = \hat{a}_z \frac{4E_{i0}^2}{\eta} \sin(k_1 z) \cos(k_1 z) \sin \omega t \cos \omega t = \hat{a}_z \frac{E_{i0}^2}{\eta} \sin(2k_1 z) \sin(2\omega t)$$

瞬时功率流随时间按周期变化，但仅在两个波节点之间进行电场和磁场的能量交换，不发生电磁能量的单向传输。



$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = \hat{a}_z \frac{4E_{i0}^2}{\eta} \sin(k_1 z) \cos(k_1 z) \sin \omega t \cos \omega t = \hat{a}_z \frac{E_{i0}^2}{\eta} \sin(2k_1 z) \sin(2\omega t)$$

十分明显，式每隔四分之一波长，坡印亭矢量瞬时值的符号，即能流的方向要改变一次；每隔四分之一周期时间，坡印亭矢量瞬时值的符号，也为能流的方向又改变一次。

它表示电磁能相互转换，以储能的形式存在于空间。

入射电磁波的全反射构成驻波。



平面波向理想介质的垂直入射



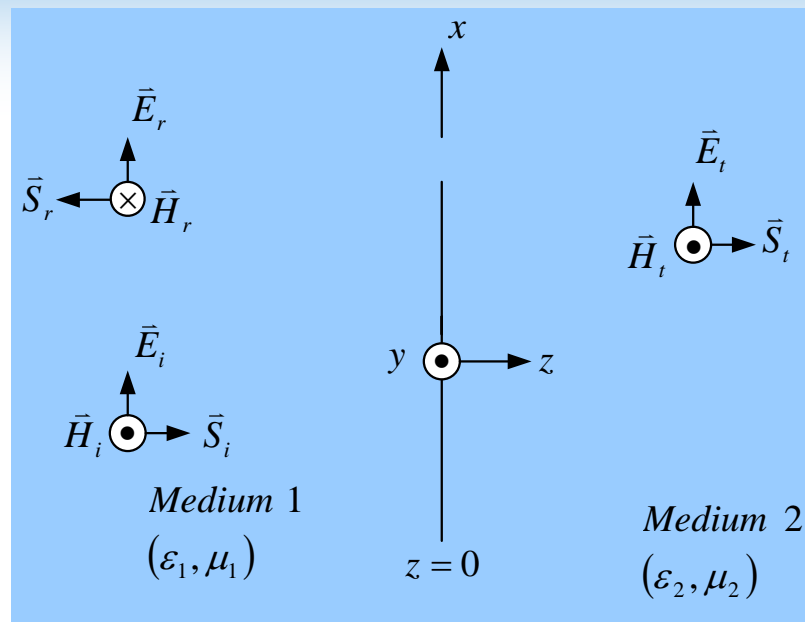
区域 1 中的场和区域 2 中的场

平面波在介质界面入射和导体界面的情况有着本质的不同

对于导体界面，因为导体内部不存在电场和磁场，所以只存在入射波和反射波；

而对于介质界面，则存在三种波：即除了入射波和反射波之外，还有透射（或折射）波。

为了满足分界面上的边界条件，反射波、入射波、透射波应该有相同的频率和极化



建立坐标系，将分界面置于坐标 $z = 0$ 处，设均匀平面波沿着 z 方向垂直入射到界面上。



区域 1 中的场分为入射波和反射波

入射波

$$\vec{E}_i = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \hat{a}_y E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{k} = k \hat{a}_z$$

反射波

$$\vec{E}_r = \hat{a}_x E_{r0} e^{jk_1 z}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{\eta_1} \hat{a}_y E_{r0} e^{jk_1 z}$$

$$\vec{k} = k (-\hat{a}_z)$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

E_{i0} 是 $z=0$ 处入射波的振幅 E_{r0} 是 $z=0$ 处反射波的振幅



区域 2 中的场为透射波

$$\vec{E}_t = \hat{a}_x E_{t0} e^{-jk_2 z}$$

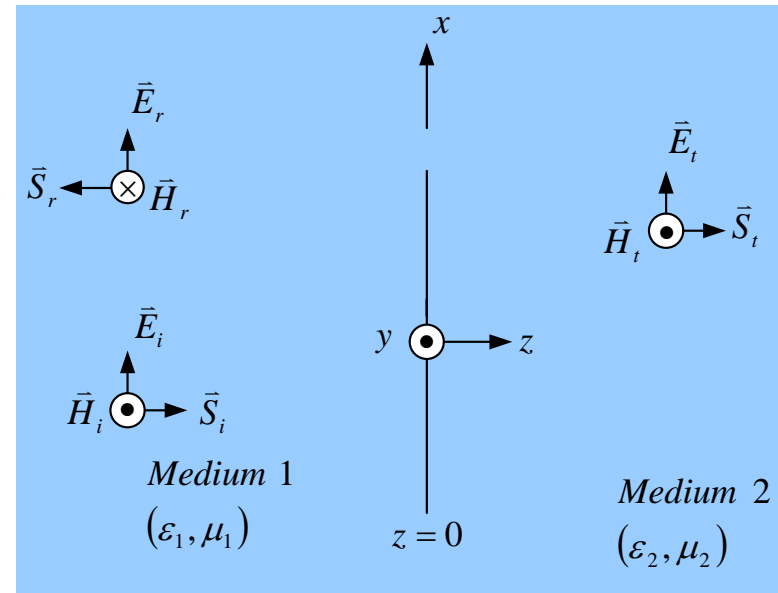
$$\vec{H}_t = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_2} E_{t0} e^{-jk_2 z}$$

$$\vec{k} = k \hat{a}_z$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

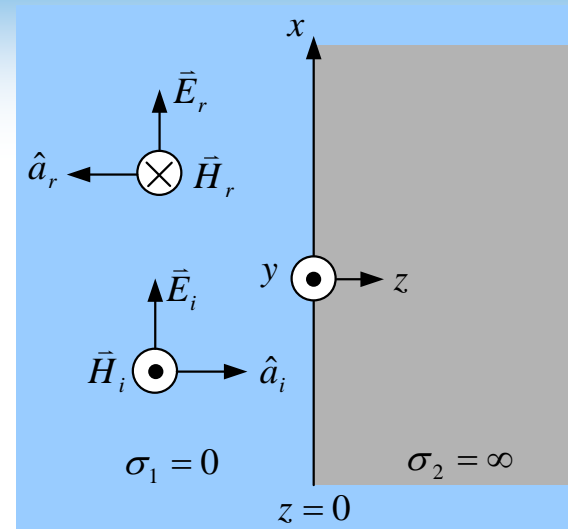
E_{t0} 是 $z=0$ 处透射波的振幅



接下来研究 E_{i0} 、 E_{r0} 和 E_{t0} 的关系



根据 $z=0$ 处的边界条件，确定反射波振幅、透射波振幅和入射波振幅的关系，注意此时分界面上的边界条件为 $E_{2t} = E_{1t}, H_{2t} = H_{1t}$ ，注意理想介质分界面上不存在面电流



$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ \frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2}E_{t0} \end{cases}$$

解出 E_{r0} 和 E_{t0} ，可得反射系数

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

区域2中引入透射系数 T ，定义为分界面上透射波电场强度与入射波电场强度之比

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$



反射系数和透射系数的关系

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

- 分界面上的反射系数和透射系数都是无量纲的量；
- 反射系数可以为正数也可以为负数，取决于区域 1 和区域 2 中的波阻抗，如果相等则无反射；透射系数始终为正。
- 透射系数和反射系数的关系

$$T = 1 + \Gamma$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j)$$

如果区域 2 为导体， $\eta_2 = 0$ ，可知 $\Gamma = -1$ ， $T = 0$



区域 1 中合成电磁波的时空特性

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(z) &= \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) = \hat{a}_x E_{i0} (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}) = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 + \Gamma e^{j2k_1 z}) \\ &= \hat{a}_x E_{i0} \left[(1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} + \Gamma (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z}) \right] \\ &= \hat{a}_x E_{i0} \left[T e^{-jk_1 z} + j2\Gamma \sin k_1 z \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_1(z) &= \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 - \Gamma e^{j2k_1 z}) \\ &= \hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} \left[T e^{-jk_1 z} - 2\Gamma \cos k_1 z \right]\end{aligned}$$

从形式上可以看出，第一项是沿着 z 方向传播的行波，第二项是驻波。这种既有行波成分又有驻波成分的电磁波称为行驻波。



$$\bar{E}_1(z) = \hat{a}_x E_{i0} (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z})$$

$$\bar{H}_1(z) = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} (e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z})$$

因为有行波成分，因此行驻波的场强在某些固定位置处仍然存在最大值和最小值，只是此时的最小值不再为零。

区域1中电磁场的模值

$$|\bar{E}_1(z)| = E_{i0} \sqrt{1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_1 z}$$

$$|\bar{H}_1(z)| = \frac{1}{\eta_1} \sqrt{1 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cos 2k_1 z}$$

可见区域 1 中的合成电磁波幅值仍是坐标 z 的周期函数，周期为 $\lambda_1/2$ 。

下面分两种情况讨论。



为了反映行驻波状态中，驻波成分的大小，引入驻波比的概念。

驻波比定义为行驻波电场（磁场）的最大值与最小值之比，也记为 **VSWR**（voltage standing wave ratio）

$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$-1 \leq \Gamma \leq 1 \quad \longrightarrow \quad 1 \leq S$$

$\Gamma = 0$ 时， $S = 1$ ，是行波状态，区域 1 没有反射，全部入射功率进入区域 2



区域 2 中合成电磁波的时空特性

区域 2 中只有透射波，引入透射系数之后，
电磁场可以表示为

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_2(\mathbf{z}) &= \bar{\mathbf{E}}_t(\mathbf{z}) = \hat{\mathbf{a}}_x T \cdot \mathbf{E}_{i0} e^{-jk_2 z} \\ \bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{z}) &= \bar{\mathbf{H}}_t(\mathbf{z}) = \hat{\mathbf{a}}_y \frac{1}{\eta_2} \cdot T \cdot \mathbf{E}_{i0} e^{-jk_2 z}\end{aligned}$$

是沿着 + z 方向传播的平面电磁波（行波）



区域 1 中的电磁能量

合成场的平均功率密度矢量

$$\vec{E}_1(z) = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 + \Gamma e^{j2k_1 z})$$

$$\vec{H}_1(z) = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 - \Gamma e^{j2k_1 z})$$

$$\vec{S}_{av,1} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* \right] = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} [1 - |\Gamma|^2]$$

入射波的平均功率密度矢量

$$\vec{S}_{av,i} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \right] = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{i0}^2}{\eta_1}$$

反射波的平均功率密度矢量

$$\vec{S}_{av,r} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_r \times \vec{H}_r^* \right] = \hat{a}_z - \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} |\Gamma|^2$$

对比可知

$$\vec{S}_{av,1} = \vec{S}_{av,i} - \vec{S}_{av,r}$$

区域 1 中向 z 方向传输的平均功率密度实际上等于入射波传输的功率减去反射波带回的功率



区域 2 中的电磁能量

$$\vec{E}_2(z) = \vec{E}_t(z) = \hat{a}_x T \cdot E_{i0} e^{-jk_2 z}$$

$$\vec{H}_2(z) = \vec{H}_t(z) = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_2} \cdot T \cdot E_{i0} e^{-jk_2 z}$$

区域 2 中向 z 方向传输的平均功率密度矢量为

$$\vec{S}_{av,2} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \right] = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{|T|^2 E_{i0}^2}{\eta_2}$$

根据定义可知 $1 - |\Gamma|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} |T|^2$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

➔ $\vec{S}_{av,2} = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{|T|^2 E_{i0}^2}{\eta_2} = \hat{a}_z \left[1 - |\Gamma|^2 \right] \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} = \vec{S}_{av,1}$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

区域 2 中的透射的功率等于区域 1 中传输的功率

$$\vec{S}_{av,t} = \vec{S}_{av,i} - \vec{S}_{av,r}$$

能量守恒



例 2： 频率为 $f = 300\text{MHz}$ 的线极化均匀平面波，其电场强度振幅值为 2V/m ，从空气垂直入射到理想介质平面上 $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$ ，求

求：

- 1、反射系数、透射系数、驻波比；
- 2、入射波、反射波和透射波的电场和磁场；
- 3、入射功率、反射功率和透射功率。



解：建立坐标系，设入射波为 x 方向的线极化，沿 z 轴方向传播

两介质区域中波阻抗

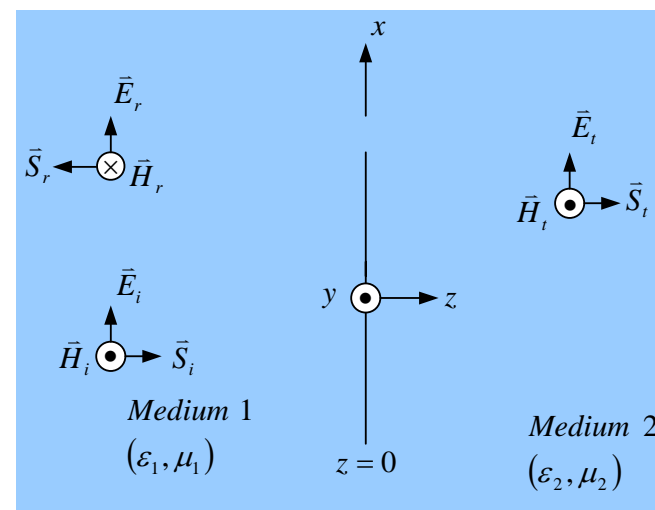
$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{2}\eta_0 = 60\pi$$

两介质区域中波数

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 2\pi f \frac{1}{c} = 2\pi$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r} = 2\pi f \sqrt{\epsilon_r} \frac{1}{c} = 4\pi$$



1、反射系数、透射系数、驻波比

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{2}\eta_0 = 60\pi$$

$$\longrightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$

$$\longrightarrow S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 2$$



2、入射波、反射波、透射波

$$\eta_1 = 120\pi \quad \eta_2 = 60\pi$$

$$k_1 = 2\pi \quad k_2 = 4\pi$$

入射波

$$\vec{E}_i = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z} = \hat{a}_x 2 e^{-j2\pi z}$$

$$\vec{H}_i = \hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} = \hat{a}_y \frac{1}{60\pi} e^{-j2\pi z}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}$$

反射波

$$\vec{E}_r = \hat{a}_x \Gamma |\vec{E}_i| \cdot e^{jk_1 z} = -\hat{a}_x \frac{2}{3} e^{j2\pi z}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{\eta_1} \hat{a}_y \Gamma |\vec{E}_i| \cdot e^{jk_1 z} = +\hat{a}_y \frac{1}{180\pi} e^{j2\pi z}$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$

透射波

$$\vec{E}_t = \hat{a}_x T |\vec{E}_i| \cdot e^{-jk_2 z} = -\hat{a}_x \frac{4}{3} e^{-j4\pi z}$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{\eta_2} \hat{a}_y T |\vec{E}_i| \cdot e^{-jk_2 z} = +\hat{a}_y \frac{1}{45\pi} e^{-j4\pi z}$$



3、入射功率、反射功率和透射功率。

入射

$$\bar{S}_{av,i} = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}_i|^2}{\eta_1} = \hat{a}_z \frac{1}{60\pi} \quad W/m^2$$

反射

$$\bar{S}_{av,r} = \hat{a}_z - \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}_i|^2}{\eta_1} |\Gamma|^2 = -\hat{a}_z \frac{1}{540\pi} \quad W/m^2$$

透射

$$\bar{S}_{av,t} = \hat{a}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}_i|^2}{\eta_2} |T|^2 = \hat{a}_z \frac{2}{135\pi} \quad W/m^2$$

显然

$$\bar{S}_{av,t} = \bar{S}_{av,i} - \bar{S}_{av,r}$$

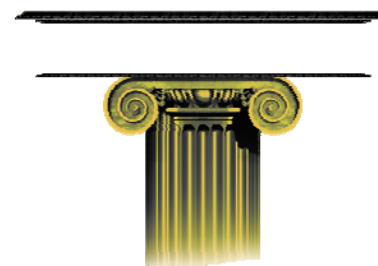


作业

p250: 22, 23, 24

下课

请按时交作业



See you next time!

