电子工程学院
School of Electronic Engineering,Xidian University

电磁场与电磁波

§ 时变电磁场的Maxwell方程组

主讲人：王楠

N
W 楠 E
S

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY 1931

EMC Group

前面各章讨论了静态场问题，在研究静态场过程中，我们知道，静电荷的静电场、恒定电流的静磁场是独立存在的。

不存在静磁场，也能存在静电场，反之亦然。静电场和静磁场本身相互无关，因此可以分开研究。

如果电荷、电流是时间变化的，此时产生的时变电场、时变磁场中，电场和磁场不再相互独立，而是互相激发和转化，构成了一个统一的整体。

人类的研究过程是每个人认识过程的集中反映——即由简单到复杂，由个别到普通的必然规律

当然，电与磁亦不例外，人们就是由静电场和恒稳磁场开始认识的。在这种情况下，电场和磁场是独立研究的，几乎毫不相关。

但是，学历极低的**Faraday**却作出了令所有人瞠目结舌的巨大贡献——他要研究场与空间的相互作用，还存在对时间的相互作用；从数学上来看问题，即不仅有场和算子的相互作用，而且还有场对时间的偏导数。

正是这一工作拉开了电磁学新的序幕。

本章我们证明，时变电场能够产生时变磁场；时变磁场能够产生时变电场。

时变场中，电场和磁场不再相互独立，时变电场和时变磁场互相激发，互相转化，构成统一的时变电磁场。

描述电场与磁场关系的方程组称为麦克斯韦方程组（**Maxwell**）------时变电磁场的基本方程

促使**Maxwell**跻身于电磁领域，并最终完成大综合的直接动因是**Faraday**的电磁感应定律。**1831**年，法拉第最早发现了时变电场和磁场之间的关系，也即时变磁场产生时变电场。

法拉第定律给出了感应电动势与磁通时变率之间的关系，实际方向则由楞次定律说明：

感应电动势在导电回路中引起的感应电流方向是使它产生的磁场阻止回路中磁通的变化。

法拉第定律和楞次定律的结合就是法拉第电磁感应定律。

时变磁场会产生电场，它满足法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

到此我们知道：电场的源可以是静止电荷，也可以是时变磁场。

位移电流

时变磁场会产生电场，它满足法拉第电磁感应定律

时变电场可否转化为磁场？首先看磁场满足的方程

电流连续性方程

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

安培环路定理

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \Longleftrightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = \nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = 0}$$

同样的电流方程，两者出现了相互矛盾

James Clerk Maxwell首先注意到这一矛盾，与**1862**年提出位移电流的概念，并认为位移电流和电荷恒速流动形成的传导电流以同一方式激发磁场。

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}\qquad \nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{J}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0}$$

把电荷的变化量引入方程，考虑到电位移矢量

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q,\qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\nabla\cdot\vec{D}}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

和静电场的区别，就是引入了时变因子 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，它的量纲是 A/m^2，它具有电流密度的量纲，称之为位移电流密度，用 $\vec{J}_d$表示，有

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

上式也称为安培一麦克斯韦方程全电流定律（推广的安培环路定理），它的意义在于，除了传导电流以外，时变电场也可以激发磁场。

很容易得到它的积分形式

$$\boxed{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}}$$

楠

很多学习电磁学的读者都会提出这样的问题:为什么**Faraday**发现了电磁感应定律而却没有其他人做位移电流的实验呢?

主要的问题在于：在金属内部位移电流太小；而在介质内部又很难测量。

例：计算铜导体中的位移电流密度和传导电流密度的比值。设铜导体中的电场为$\vec{E}_0 \sin\omega t$，铜的电导率为 $\sigma = 5.8\times 10^{7}\, S/m$ ，$\varepsilon \approx \varepsilon_0$

解：铜中的传导电流为

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E} = \sigma E_0 \sin\omega t$$

位移电流为

$$\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon\omega\vec{E}_0 \cos\omega t$$

得到位移电流密度与传导电流密度的振幅比值为

$$\frac{J_d}{J_c} = \left|\frac{\vec{J}_d}{\vec{J}_c}\right| = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi f\varepsilon}{\sigma} = 9.6\times 10^{-19} f$$

可见，即便在微波频率，位移电流依然极小。

麦克斯韦方程组

通过调查，研究，分析，创新，**Maxwell**终于完成了伟大的电磁综合。他不仅给出了电场和磁场的散度和旋度，而且首次把电和磁正式结合了起来。

完备的麦克斯韦方程组的微分形式是

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ → 全电流定律

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ → 法拉第电磁感应定律

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$ → 磁通连续性原理

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$ → 高斯定理

麦克斯韦方程是在对宏观电磁现象的实验定律进行分析总结基础上经过扩充和推广而得到的

它揭示了电与磁之间，电磁场与电荷、电流之间的相互关系，是一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律。

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}\,' = \iint_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}\,' = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \end{cases}$$

它有深刻而丰富的物理意义，是电磁运动规律的最简洁的数学语言描述。

它是电磁场的基本方程，使我们分析研究电磁间的基本出发点。

麦克斯韦方程组
的重大意义

麦克斯韦方程组是电磁场的基本方程，它在电磁学中的地位等同于力学中的牛顿定律，是我们分析电磁问题的基本出发点。

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}\,' = \iint_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}\,' = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}' = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

是修正后的安培定理，说明时变电场能激发磁场

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}' = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

是法拉第电磁感应定律，说明时变磁场能激发电场

它们是**Maxwell**方程组的核心，说明时变电场和时变磁场可以互相转换。

时变电磁场可以脱离场源独立存在，在空间形成电磁波。奠定了无线电波应用的基础。

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

它们表示磁通连续性，也即空间的磁力线没有起点也没有终点。从物理意义上讲，是空间未发现自由磁荷的结果。

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV}$$

它们是电场的高斯定理，它表明电场是有通量源的场。

在有源区，时变场中电场的散度和旋度都不是零，因此电力线起始于正电荷，终止于负电荷；

磁场的散度为零，旋度不为零，因此磁力线是与电流铰链的闭合曲线，并且和电力线相互铰链。

在无源区，时变场电场和磁场的散度都是零，此时电力线和磁力线都是闭合曲线，并且相互铰链，电场和磁场相互转换，在空间形成电磁波。

$$\begin{cases}\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases}\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \end{cases}$$

如果场矢量不随时间变化，则**Maxwell**方程自动退化为静态场方程。

在线性介质中，**Maxwell**方程是线性方程，可以使用叠加原理。

麦克斯韦方程组的逻辑关系

再深入研究Maxwell方程组可知，四个方程之间并不独立的。

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

因此只能认为有三个独立方程

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial\left(\nabla \cdot \vec{D}\right)}{\partial t} \qquad \boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

可见电流连续性方程也是包含在**Maxwell**方程中

可以认为Maxwell方程组中的两个旋度方程高斯定理是一组独立方程；

两个旋度方程和电流连续性方程也是一族独立方程。

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\vec{D}=\rho
\end{aligned}
$$

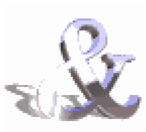
$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0
\end{aligned}
$$

每一个矢量方程等价为三个标量方程，再加上一个标量的散度方程，共有七个独立的标量方程。

作业

P187:　2，3，4，5，6

下课



请按时交作业

See you next time!