结构分析 第五章 结构动力学(2)

郭空明





模态分析可以用来确定研究对象的振动特性,是 其它动力学分析的起点。

结构内在振动特性:
固有频率
模态振型

## 模态分析是各种动力学分析类型最基础的内容。

## 4.4.1 连续弹性体的模态

## 对于连续弹性体,只有杆、梁、板等结构在边界条件不复杂时 有解析解。

等截面欧拉-伯努利梁的动力学方程为

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x,t)$$

### 等截面欧拉-伯努利梁的自由振动方程:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

假设系统存在这样一种振动:所有自由度均以相同频率和相同相位作不同振幅的简谐振动。这种振动称为主振动。

$$y(x,t) = \phi(x)q(t) = \phi(x)a\sin(\omega t + \theta)$$

描述不同自由度振幅的相对 大小,称为模态(函数)。 简谐振动的形式,其 中频率ω称为固有频率



通解: 
$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x$$
  
 $\mathcal{O}_i - \phi_i(x)$  无穷多个  
第 *i* 阶主振动:  $y^{(i)}(x,t) = a_i \phi_i(x) \sin(\omega_i t + \theta_i)$   
 $a_i \pi \theta_i$ 由系统的初始条件确定  
系统的自由振动一般是无穷多个主振动的叠加:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x) \sin(\omega_i t + \theta_i)$$



x

$$\phi(0) = 0$$
  $\phi''(0) = 0$   
 $\phi(l) = 0$   $\phi''(l) = 0$ 



注意: 这里"节点"指的是不动的点。

# 对于绝大多数结构,无法求得固有频率和振型的解析解,必须通过有限元法将其离散为多自由度系统,再进行求解。

4.4.2 多自由度系统的模态

无阻尼n自由度振动的运动方程为

$$[M]{\ddot{x}} + [K]{x} = {0}$$

假设该方程存在以下主振动:

$$\{x\} = \{\phi\}\sin(\omega t + \theta)$$

描述不同自由度振幅的相对 大小,称为<mark>模态(向量)</mark>。 简谐振动的形式,其 中频率ω称为固有频率

$$([K] - \omega^2[M]) \{\phi\} = \{0\}$$

[*K*]-ω<sup>2</sup>[*M*]称为特征矩阵。要使上式有非零解{*φ*}, 必须使其系数行列式为零:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

上式称为频率方程或特征方程。由此可求出n个特 征根ω<sup>2</sup>。

每个特征根所对应的*w*;为系统的固有角频率,将其从小到 大排列,*w*;称为第*i*阶固有角频率。

将每个特征根*ω*<sub>i</sub>(第*i*阶固有频率)代入广义特征值问题([*K*]-*ω*<sup>2</sup>[*M*]){*φ*}={0},可得到相应的非零向量{*φ*}<sub>i</sub>,为第*i*阶模态向量。该向量中各元素只代表各自由度振幅的相对大小,元素的绝对数值没有意义。



# 固有频率和模态向量只决定于系统本身的物理特性,而与外部激励和初始条件无关,它们都是系统的固有属性。

但是,如果结构存在预应力或者使结构产生大变形的载荷,这些力就会改变结构的固有频率和模态向量。

**4.4.3 ANSYS**模态分析算例

模态分析建模需要注意的地方(重要):

(1)必须定义弹性模量和密度。

(2)只能使用线性单元,任何非线性性质都将被忽略。

(3)只允许零位移约束。如果约束不够,将会出现零固有频率(刚体模态)

(4)对于平面结构,如果使用的是空间单元,一定要把所有节点的自由度约束在平面内。

(5)由于模态振型是分析所有潜在的变形模式,与载荷无关,因此不要使用对称性简化模型。不然会丢失模态。

平面简支梁的模态分析

 问题描述
 简支梁,圆截面半径为0.01m,长度为1m,弹性模 量为2.1×10<sup>5</sup>MPa,泊松比为0.3,密度为7900kg/m<sup>3</sup>。

- 1. 过滤界面
- GUI: 【Main Menu】 / 【Preferences】。
- 选中"Structural"项,单击"OK"按钮。

- 2. 创建单元类型
- GUI: 【Main Menu】 / 【 [Preprocessor】 / 【Element Type】 / 【Add/Edit/Delete】
- 在弹出的对话框中,单击"Add"按钮;弹出对话框,在 左侧列表中选"Structural Beam",在右侧列表中选"2 node 188",单击"Ok"按钮。

- 3. 定义材料属性
- GUI: 【Main Menu】 / 【 【Preprocessor】 / 【Material Props】 / 【Material Models】
- 弹出对话框,在右侧列表中依次单击"【Structural】/【Linear】/《Elastic】/《Isotropic】",弹出对话框,在"EX"文本框中输入2.1e11(弹性模量),在"PRXY"文本框中输入0.3(泊松比),单击"Ok"按钮;单击"【Density】",弹出对话框,在"DENS"文本框中输入7900(密度),然后关闭对话框。

▲ Define Material Model Behavior		
Material Edit Favorite Help	<b>. .</b>	
Material Models Defined	Material Models Available Favorites Structural Nonlinear Onsity Thermal Expansion Damping Friction Coefficient Specialized Materials	Density for Material Number 1      Density for Material Number 1      T1 Temperatures DENS
<	•	Add Temperature Delete Temperature Graph OK Cancel Help

- 4.设置截面
- GUI: [Main Menu] / [Preprocessor] / [Sections] / [Beam] / [Common Sections]
- 选圆截面, 输入半径0.01

- 5.建模与单元划分
- (1) 创建关键点
- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Modeling】 / 【Create】 / 【Keypoints】 / 【In Active CS】。
- 弹出对话框, 在 "Keypoint Number" 文本框中输入1, 在 "X,Y,Z" 文本 框中分别输入0,0,0, 单击 "Apply" 按钮; 在 "Keypoint Number" 文本 框中输入2, 在 "X,Y,Z" 文本框中分别输入1,0,0, 单击 "OK" 按钮。

- (2) 创建直线
- GUI: [Main Menu] / [Preprocessor] / [Modeling] / [Create] / [Lines] / [Lines] / [Straight Line]
- 弹出拾取窗口,分别拾取关键点1和2,创建一条直线,单击"OK" 按钮。

- (3) 划分单元
- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Meshing】 / 【MeshTool】。
- 弹出对话框,单击"Size Controls"区域中"Lines"后"Set"按钮,弹 出拾取窗口,拾取直线,单击"OK"按钮,弹出对话框,在"NDIV" 文本框中输入50,单击"OK"按钮。单击"Mesh"按钮,弹出拾取窗 口,拾取直线,单击"OK"按钮。

由于截面是圆截面,因此无需定义单元坐标系方向(截面方位)。

## (4)显示单元 ➤ GUI: 【Utility Menu】/【PlotCtrls】/【Style】/【Size and Shape】 弹出如图所示对话框,将"Display of element"选中,单击 "OK"。





- 6.定义分析类型
- GUI: [Main Menu] / [Solution] / [Analysis Type] / [New Analysis]
- 在弹出的对话框中选取"Modal",单击"OK"。

🚺 New Ar	nalysis		x
[ANTYPE]	Type of analysis		
			○ Static
			• Modal
			C Harmonic
			C Transient
			C Spectrum
			C Eigen Buckling
			O Substructuring/CMS
	ОК	Cancel	Help

- 7.定义模态分析方法
- GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Analysis Type】 / 【Analysis Options】
- 选择"Block Lanczos"分析方法,在"No. of modes to extract"(需要 计算的模态数)中输入"20",在Expand mode shapes和Elcalc(计算 单元结果)后面打勾, No.of modes to expand后面输入20(需要观察的 模态数),其他选项接受默认,单击"OK",弹出如图所示输入框, 全部默认,单击"OK"。

🔥 Modal Analysis	x
[MODOPT] Mode extraction method	
	Block Lanczos
	O PCG Lanczos
	O Unsymmetric
	O Damped
	O QR Damped
	C Supernode
No. of modes to extract	20
[MXPAND]	
Expand mode shapes	🔽 Yes
NMODE No. of modes to expand	20
Elcalc Calculate elem results?	Ves
[LUMPM] Use lumped mass approx?	□ No
[PSTRES] Incl prestress effects?	□ No
OK Cancel	Help

[MODOPT] Options for Block Lanczos Moda	l Analysis
FREQB Start Freq (initial shift) FREQE End Frequency Nrmkey Normalize mode shapes	0 0 To mass matrix
OK Care	el Help

### • 8.施加约束

GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Define Loads】 / 【Apply】 / 【Structural】 / 【Displacement】 / 【On Nodes】

由于是平面结构,因此首先约束所有结点(用box选中)z方向的平动(UZ),绕x轴、y轴的转动(ROTX,ROTY)。 之后再约束左端结点x,y方向的平动(UX,UY),右端结点y方向的平动(UY)。

1 ELEMENTS		ANSYS R15.0
U ROT	DEC 2 16	5 2017 :40:04
Y		
	REAL PROPERTY	
******	Κ Α Α Α.	本本金

- 10.求解
- GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Solve】 / 【Current LS】。
- 单击 "Solve Current Load Step"对话框的"OK"按钮。
   出现 "Solution is done!"提示时,求解完成。

- 11.查看结果
- (1)列表显示各阶模态固有频率
- GUI: 【Main Menu】/【General Postproc】/【Results Summary】

- (2) 查看振型
- 1)选取模态阶数
- GUI: 【Main Menu】 / 【General Postproc】 / 【Read Results】 / 【By Pick】
- 在弹出的选取框中选取要观察的模态,单击"Read",然 后单击"Close"。如图所示。

Λ	Results F	ile: beammodal.rst			X
	Availa	ble Data Sets:			
	Set	Frequency	Load Step	Substep C	umui 🔺
	1	40.466	1	1	
	2	161.85	1	2	
	- 3	364.10	1	3	
	4	647.14	1	4	
	5	1010.9	1	5	
	6	1289.0	1	6	
	7	1455.2	1	7	
	8	1980.0	1	8	
	9	2585.2	1	9	
	10	3270.7	1	10	
	11	3868.3	1	11	
	12	4036.5	1	12	
	13	4882.5	1	13	
	14	5809.0	1	14	
	15	6451.4	1	15	_1
	16	6816.0	1	16	<u> </u>
		Read	Next	Previous	
		Close		Help	

• 2)图形显示

读入结果后,可以画出这阶模态的变形图和动应力分布。注意此是的位移和应 力绝对大小没有意义,只表示各点的相对大小。可以看出弯曲振型均为正弦波, 这与理论一致。另外由于梁单元不是纯弯,可能还会有伸缩振动的模态。



- 3)动画
- GUI: 【Utility Menu】 / 【PlotCtrls】 / 【Animate】 / 【Mode Shape】