

结构分析

第五章 结构动力学 (2)

郭空明

4.4 结构模态分析

什么是模态分析？

模态分析可以用来确定研究对象的振动特性，是其它动力学分析的起点。

- 结构内在振动特性：
 - 固有频率
 - 模态振型

模态分析是各种动力学分析类型最基础的内容。

4.4.1 连续弹性体的模态

对于连续弹性体，只有杆、梁、板等结构在边界条件不复杂时有解析解。

等截面欧拉-伯努利梁的动力学方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t)$$

等截面欧拉-伯努利梁的自由振动方程：

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

假设系统存在这样一种振动：所有自由度均以相同频率和相同相位作不同振幅的简谐振动。这种振动称为主振动。

$$y(x,t) = \phi(x)q(t) = \phi(x) a \sin(\omega t + \theta)$$

描述不同自由度振幅的相对大小，称为模态（函数）。

简谐振动的形式，其中频率 ω 称为固有频率

$$y(x, t) = \phi(x)q(t) = \phi(x)a \sin(\omega t + \theta)$$

代入

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$$



$$\phi''''(x) - \beta^4 \phi(x) = 0$$

其中

$$\beta^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2$$

通解:

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x$$

ω_i — $\phi_i(x)$

存在无穷多个固有频率及其对应的模态

通解: $\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x$

ω_i — $\phi_i(x)$ 无穷多个

第 i 阶主振动: $y^{(i)}(x, t) = a_i \phi_i(x) \sin(\omega_i t + \theta_i)$

a_i 和 θ_i 由系统的初始条件确定

系统的自由振动一般是无穷多个主振动的叠加:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x) \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

例：简支梁弯曲振动的固有频率和模态函数

解：

一端圆柱固定铰
另一端圆柱滑动铰

固定铰：挠度和截面弯矩为零

滑动铰：挠度和截面弯矩为零

得：

$$C_1 = C_3 = 0$$

以及：

$$\begin{cases} C_2 \sin \beta l + C_4 \sinh \beta l = 0 \\ -C_2 \sin \beta l + C_4 \sinh \beta l = 0 \end{cases} \longrightarrow C_4 = 0$$

频率方程：

$$\sin \beta l = 0 \longrightarrow \beta_i l = i\pi, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

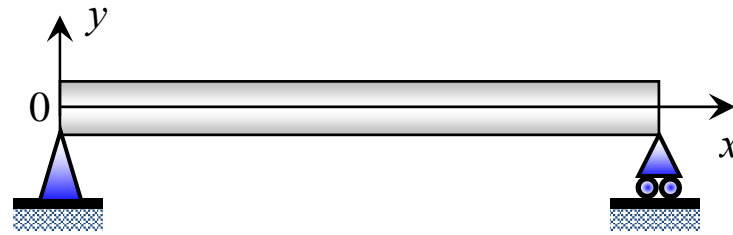
固有频率：

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

模态函数：

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x$$



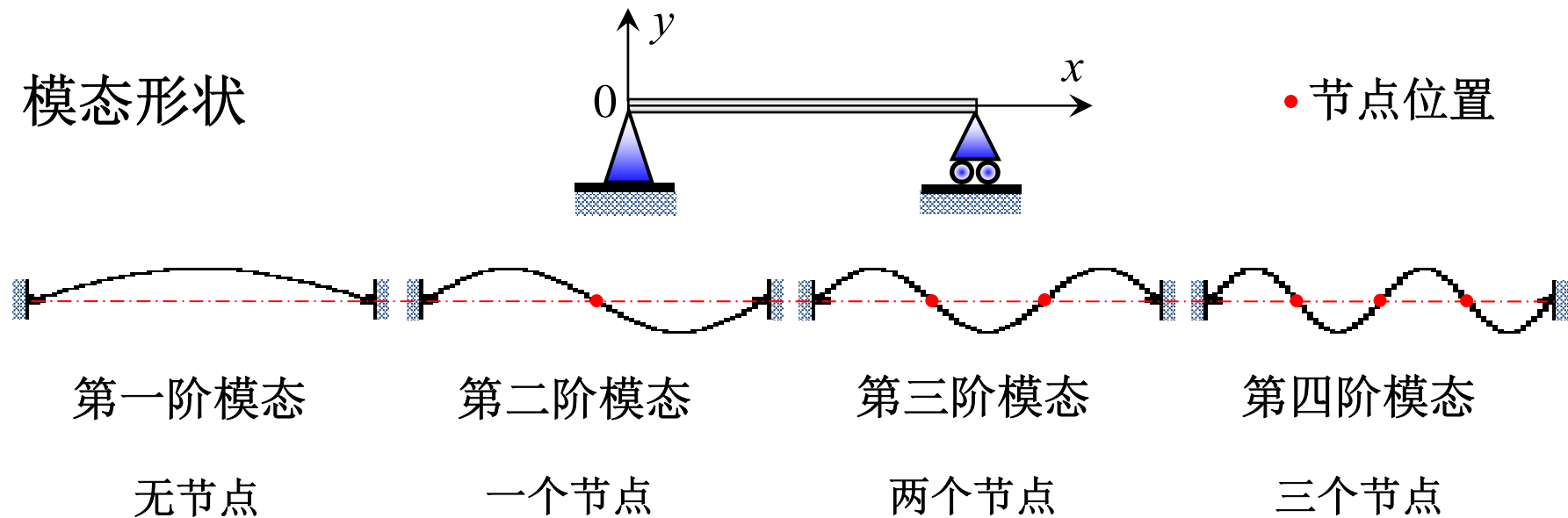
$$\phi(0) = 0 \quad \phi''(0) = 0$$

$$\phi(l) = 0 \quad \phi''(l) = 0$$

模态函数：

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

模态形状



注意：这里“节点”指的是不动的点。

对于绝大多数结构，无法求得固有频率和振型的解析解，必须通过有限元法将其离散为多自由度系统，再进行求解。

4.4.2 多自由度系统的模态

无阻尼 n 自由度振动的运动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

假设该方程存在以下主振动：

$$\{x\} = \{\phi\} \sin(\omega t + \theta)$$

描述不同自由度振幅的相对大小，称为**模态（向量）**。

简谐振动的形式，其中频率 ω 称为**固有频率**

代入振动方程可得：

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{0\}$$

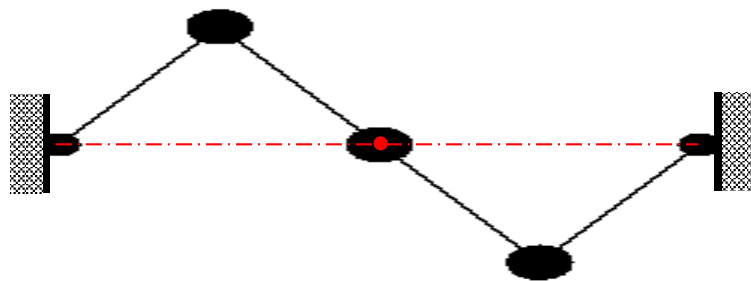
$[K] - \omega^2 [M]$ 称为特征矩阵。要使上式有非零解 $\{\phi\}$ ，必须使其系数行列式为零：

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

上式称为频率方程或特征方程。由此可求出 n 个特征根 ω^2 。

每个特征根所对应的 ω_i 为系统的固有角频率，将其从小到大排列， ω_i 称为第*i*阶固有角频率。

将每个特征根 ω_i （第*i*阶固有频率）代入广义特征值问题 $([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\}$ ，可得到相应的非零向量 $\{\phi\}_i$ ，为第*i*阶**模态向量**。该向量中各元素只代表各自由度振幅的相对大小，元素的绝对数值没有意义。



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

固有频率和模态向量只决定于系统本身的物理特性，而与外部激励和初始条件无关，它们都是系统的固有属性。

但是，如果结构存在预应力或者使结构产生大变形的载荷，这些力就会改变结构的固有频率和模态向量。

4.4.3 ANSYS模态分析算例

模态分析建模需要注意的地方（重要）：

(1) 必须定义弹性模量和密度。

(2) 只能使用线性单元，任何非线性性质都将被忽略。

(3) 只允许零位移约束。如果约束不够，将会出现零固有频率（刚体模态）

(4) 对于平面结构，如果使用的是空间单元，一定要把所有节点的自由度约束在平面内。

(5) 由于模态振型是分析所有潜在的变形模式，与载荷无关，因此不要使用对称性简化模型。不然会丢失模态。

平面简支梁的模态分析

- 问题描述

简支梁，圆截面半径为0.01m，长度为1m，弹性模量为 $2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ ，泊松比为0.3，密度为 7900kg/m^3 。

- 1. 过滤界面

- GUI: **【Main Menu】 / 【Preferences】** 。
- 选中“Structural”项，单击“OK”按钮。

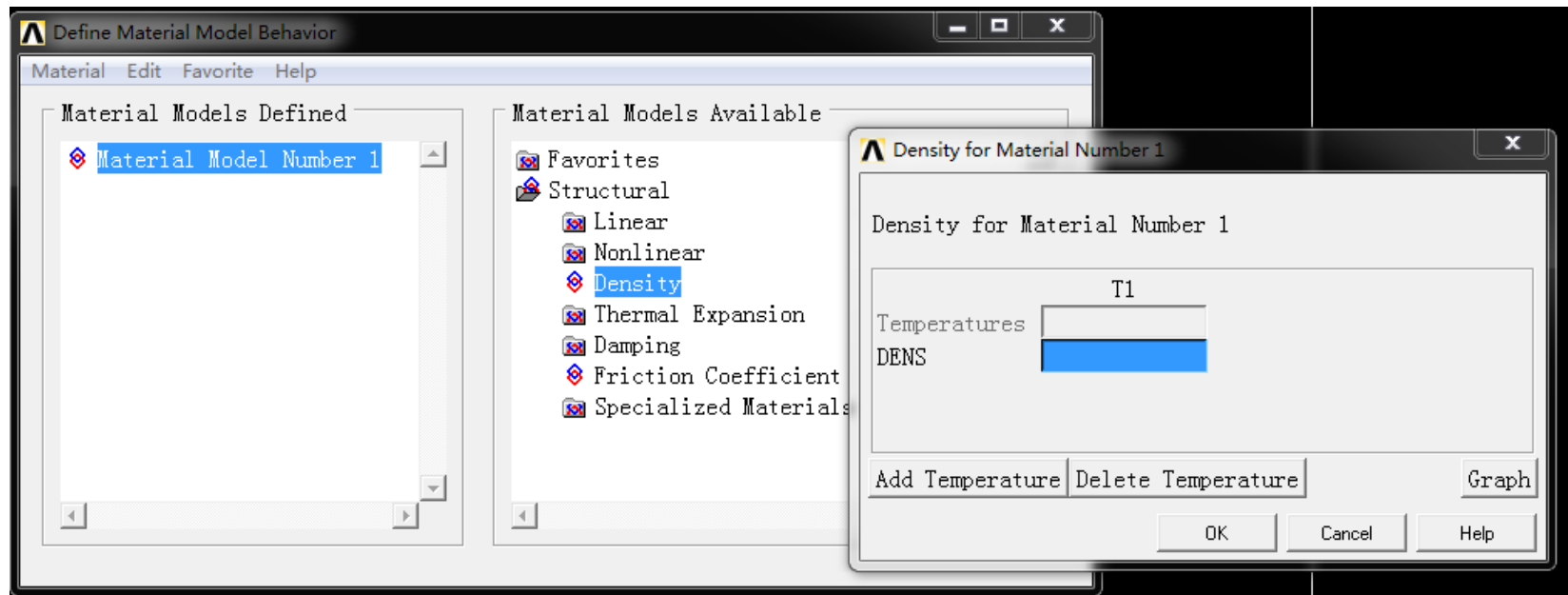
- 2. 创建单元类型

- GUI: **【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Element Type】 / 【Add/Edit/Delete】**
- 在弹出的对话框中，单击“Add”按钮；弹出对话框，在左侧列表中选“Structural Beam”，在右侧列表中选“2 node 188”，单击“Ok”按钮。

- 3. 定义材料属性

- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Material Props】 / 【Material Models】

- 弹出对话框，在右侧列表中依次单击“【Structural】 / 【Linear】 / 【Elastic】 / 【Isotropic】”，弹出对话框，在“EX”文本框中输入 $2.1e11$ （弹性模量），在“PRXY”文本框中输入 0.3 （泊松比），单击“Ok”按钮；单击“【Density】”，弹出对话框，在“DENS”文本框中输入 7900 （密度），然后关闭对话框。



- 4.设置截面

- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Sections】 / 【Beam】 / 【Common Sections】

- 选圆截面，输入半径0.01

- 5.建模与单元划分

- (1) 创建关键点

- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Modeling】 / 【Create】 / 【Keypoints】 / 【In Active CS】。

- 弹出对话框，在“Keypoint Number”文本框中输入1，在“X,Y,Z”文本框中分别输入0,0,0，单击“Apply”按钮；在“Keypoint Number”文本框中输入2，在“X,Y,Z”文本框中分别输入1,0,0，单击“OK”按钮。

- (2) 创建直线

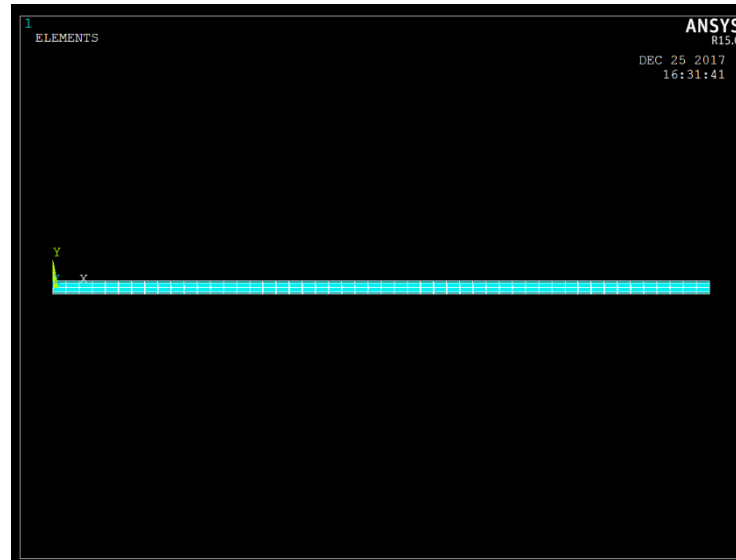
- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Modeling】 / 【Create】 / 【Lines】 / 【Lines】 / 【Straight Line】
- 弹出拾取窗口，分别拾取关键点1和2，创建一条直线，单击“OK”按钮。

- (3) 划分单元

- GUI: 【Main Menu】 / 【Preprocessor】 / 【Meshing】 / 【MeshTool】。
- 弹出对话框，单击“Size Controls”区域中“Lines”后“Set”按钮，弹出拾取窗口，拾取直线，单击“OK”按钮，弹出对话框，在“NDIV”文本框中输入50，单击“OK”按钮。单击“Mesh”按钮，弹出拾取窗口，拾取直线，单击“OK”按钮。

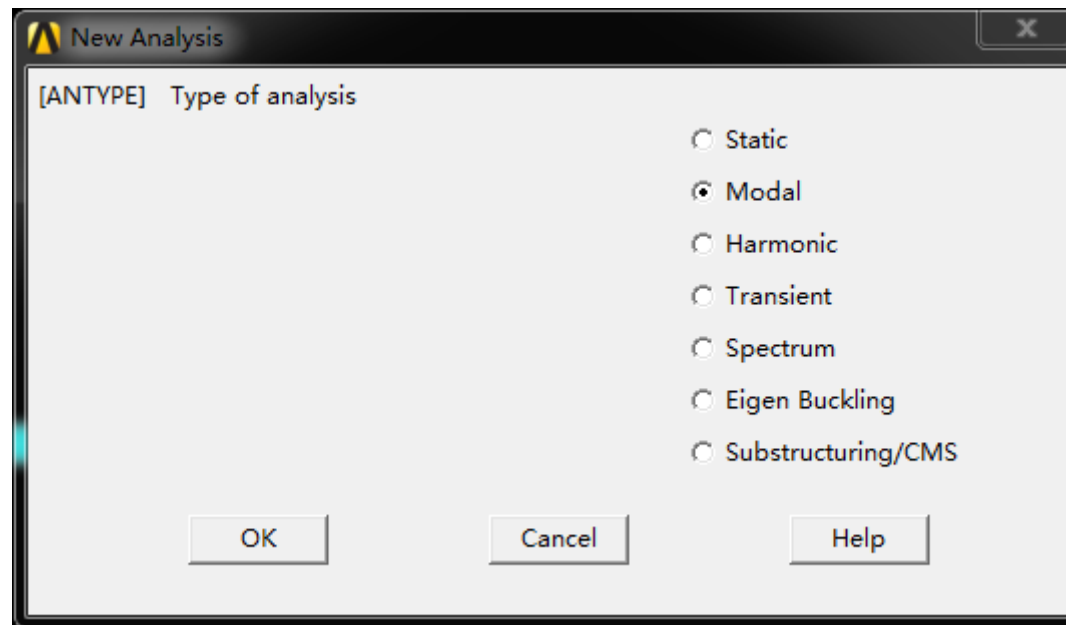
由于截面是圆截面，因此无需定义单元坐标系方向（截面方位）。

- (4) 显示单元
- GUI: 【Utility Menu】 / 【PlotCtrls】 / 【Style】 / 【Size and Shape】
- 弹出如图所示对话框，将“Display of element”选中，单击“OK”。

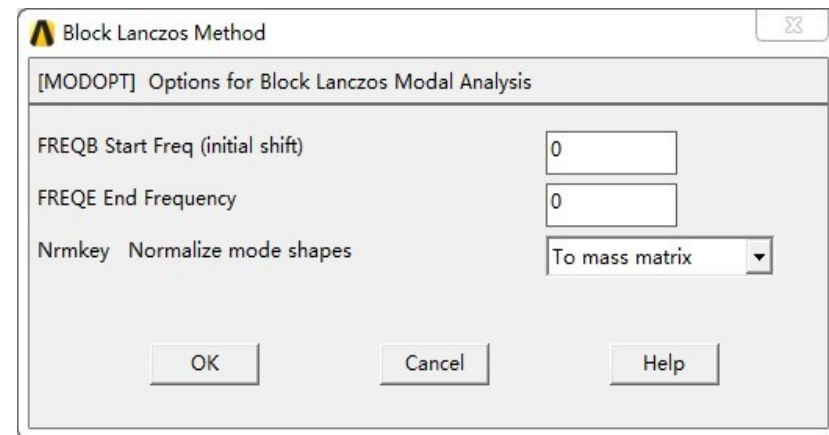
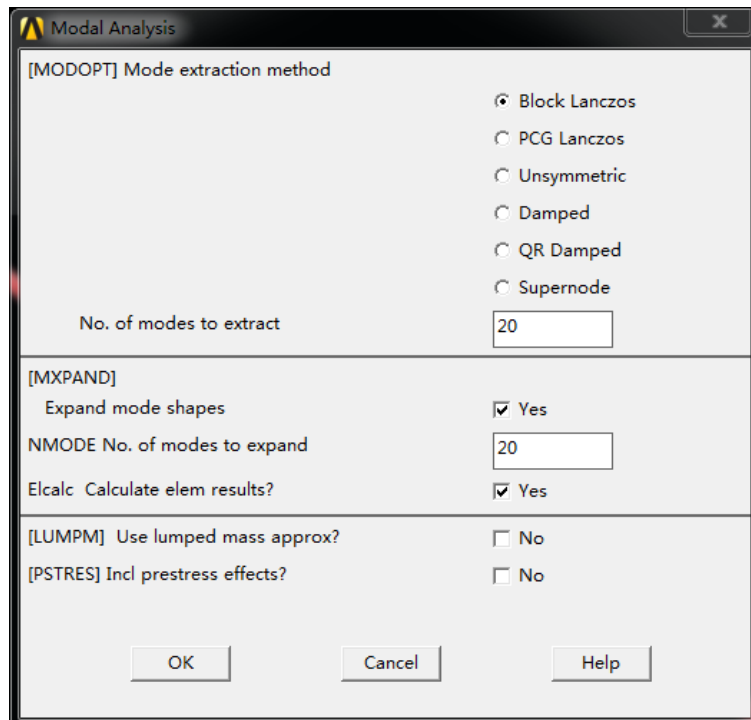


(5) 合并重复单元、压缩编号 (略)

- 6.定义分析类型
 - GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Analysis Type】 / 【New Analysis】
- 在弹出的对话框中选取“Modal”，单击“OK”。



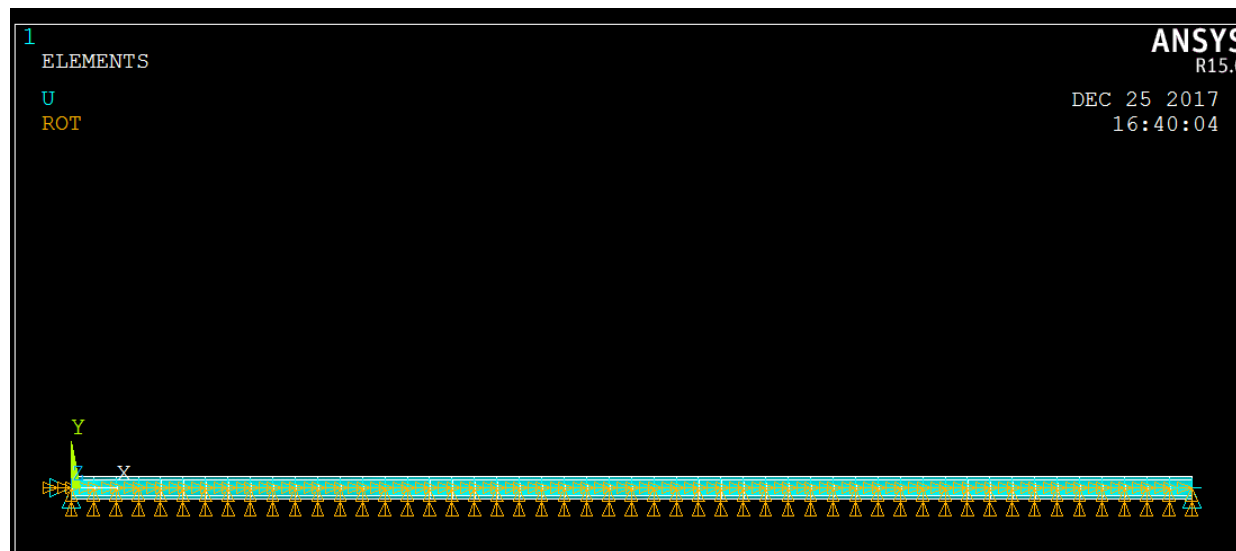
- 7.定义模态分析方法
 - GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Analysis Type】 / 【Analysis Options】
- 选择“Block Lanczos”分析方法，在“No. of modes to extract”（需要计算的模态数）中输入“20”，在Expand mode shapes和Elcalc（计算单元结果）后面打勾, No.of modes to expand后面输入20（需要观察的模态数）,其他选项接受默认，单击“OK”，弹出如图所示输入框，全部默认，单击“OK”。



- 8.施加约束

- GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Define Loads】 / 【Apply】 / 【Structural】 / 【Displacement】 / 【On Nodes】

由于是平面结构，因此首先约束所有结点（用box选中）z方向的平动（UZ），绕x轴、y轴的转动(ROTX,ROTY)。之后再约束左端结点x，y方向的平动(UX,UY)，右端结点y方向的平动(UY)。



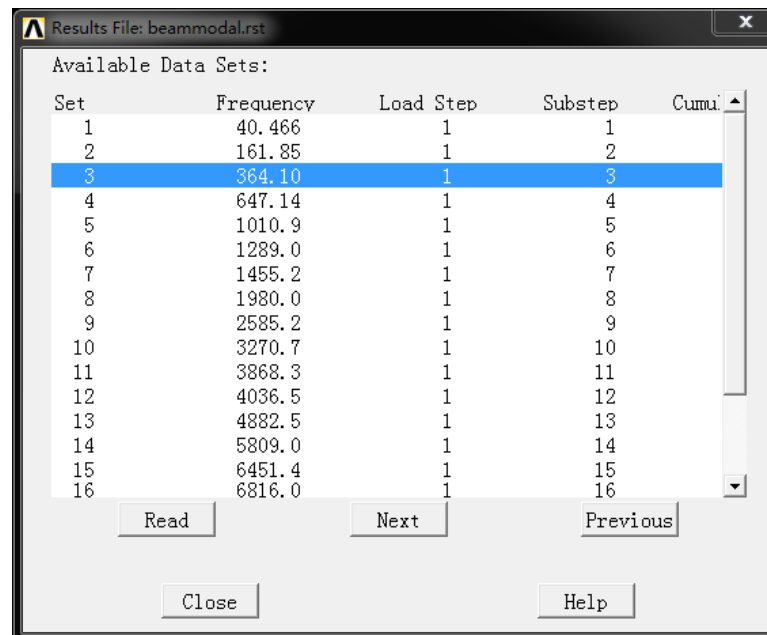
- 10.求解

- GUI: 【Main Menu】 / 【Solution】 / 【Solve】 / 【Current LS】。
- 单击“Solve Current Load Step”对话框的“OK”按钮。出现“Solution is done!”提示时，求解完成。

- 11.查看结果

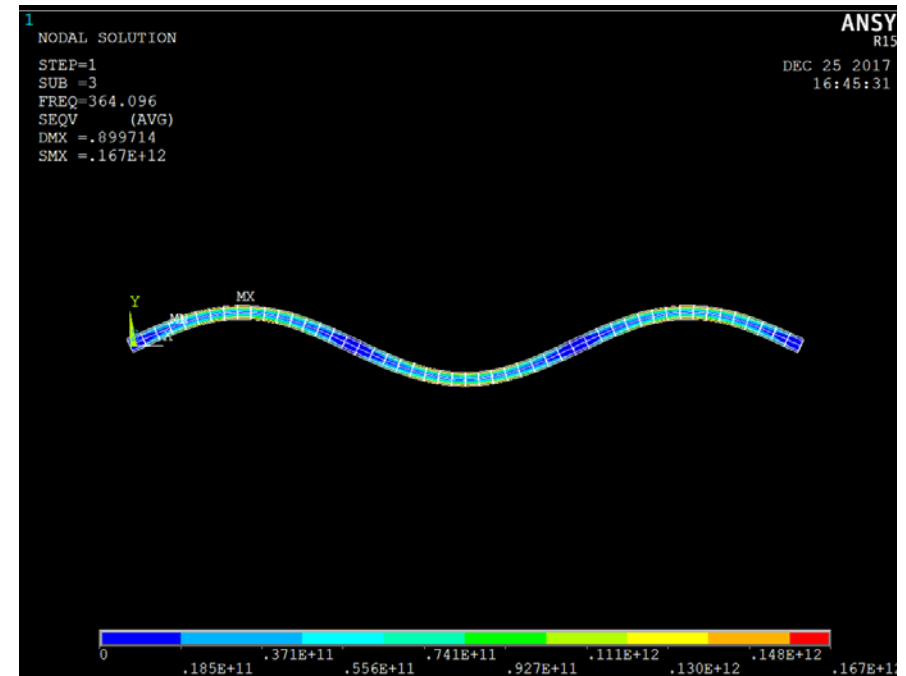
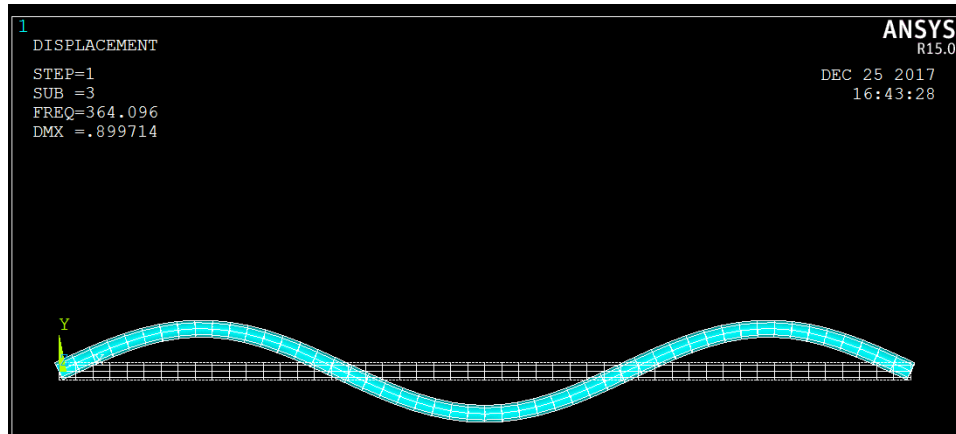
- (1) 列表显示各阶模态固有频率
- GUI: 【Main Menu】 / 【General Postproc】 / 【Results Summary】

- (2) 查看振型
- 1) 选取模态阶数
- GUI: 【Main Menu】 / 【General Postproc】 / 【Read Results】 / 【By Pick】
- 在弹出的选取框中选取要观察的模态，单击“Read”，然后单击“Close”。如图所示。



• 2) 图形显示

读入结果后，可以画出这阶模态的变形图和动应力分布。注意此是位移和应力绝对大小没有意义，只表示各点的相对大小。可以看出弯曲振型均为正弦波，这与理论一致。另外由于梁单元不是纯弯，可能还会有伸缩振动的模态。



• 3) 动画

- GUI: 【Utility Menu】 / 【PlotCtrls】 / 【Animate】 / 【Mode Shape】