

结构分析

第二章 杆系几何构造分析 (1)

郭空明

2-1 基本概念

2-2 结构的计算自由度

2-3 几何不变体系的组成规则

2-4 几何不变性与静定性的关系

本章重点： 几何不变体系的定义、自由度与计算自由度、几何不变体系的判别、与静定性的关系

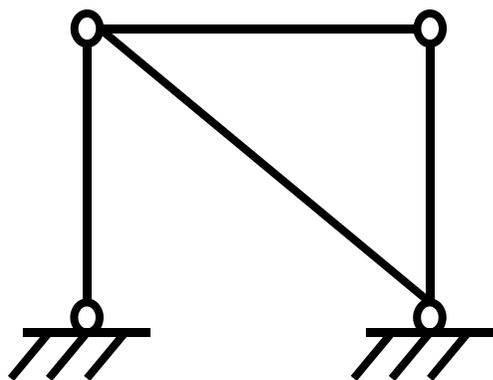
本章难点： 瞬变体系、瞬铰、几何不变体系的判别

2-1 基本概念

(1) 几何不变性

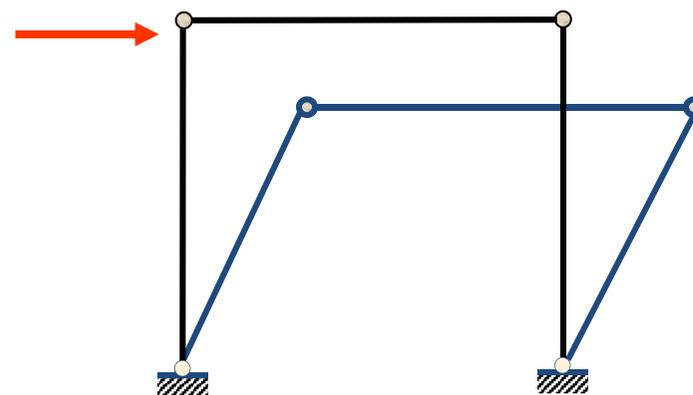
几何不变体系：

不考虑材料应变条件下，
能维持其几何形状和位置
不变的体系。



几何可变体系：

不考虑材料应变条件下，
体系的位置和形状可以改
变的体系。



一般结构都必须几何不变才能具有承载能力，几何构造分析的目的就是要确认体系是否几何不变。这也是本章的主要任务。

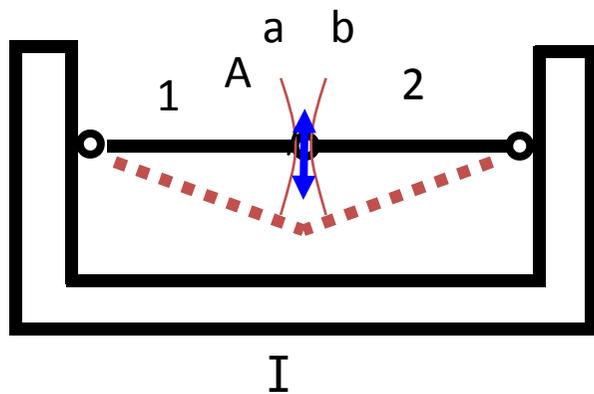
几何可变体系

```
graph LR; A[几何可变体系] --> B[常变体系: 体系可产生有限位移。]; A --> C[瞬变体系: 体系可产生无限小位移, 之后变为几何不变体系。];
```

常变体系：体系可产生有限位移。

瞬变体系：体系可产生无限小位移，之后变为几何不变体系。

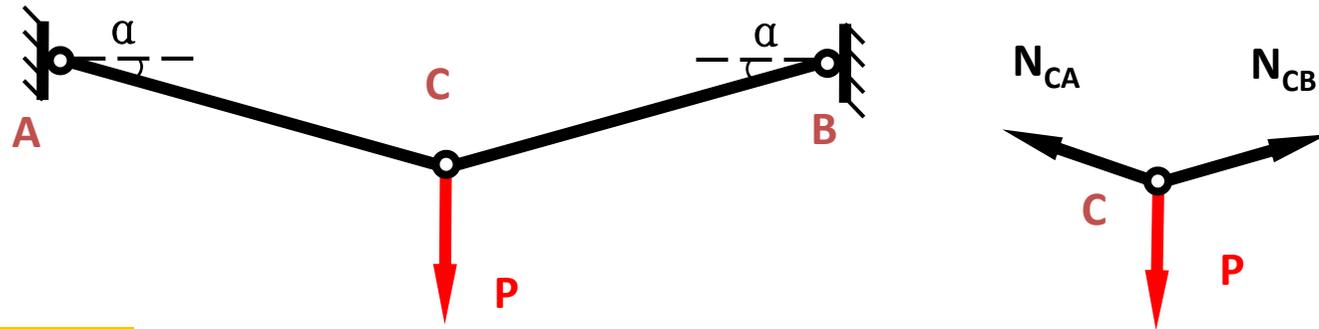
瞬变体系：本来是几何可变体系，经微小位移后成为几何不变的体系



(1)当链杆1和2共线时，圆弧a和b在A点相切，因此点可沿公切线方向做微小运动，体系是可变体系。

(2)当A点沿公切线发生微小位移后，链杆1和2不再共线，因此体系不再是可变体系。

瞬变体系结构微小位移后的受力分析



取C结点:

$$N_{CA} = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

$$\sum Y = 0$$

$$2N_{CA}\sin\alpha = P$$

若 α 很小, N_{CA} 就很大。

因此瞬变体系也不能作为结构使用, 一般将瞬变体系归并到可变体系。设计的结构也不要接近瞬变体系。

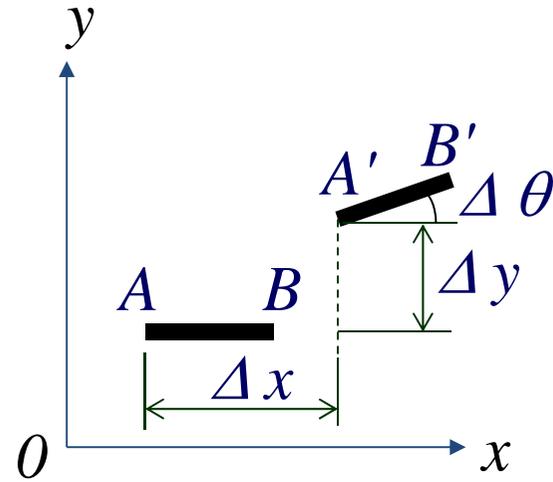
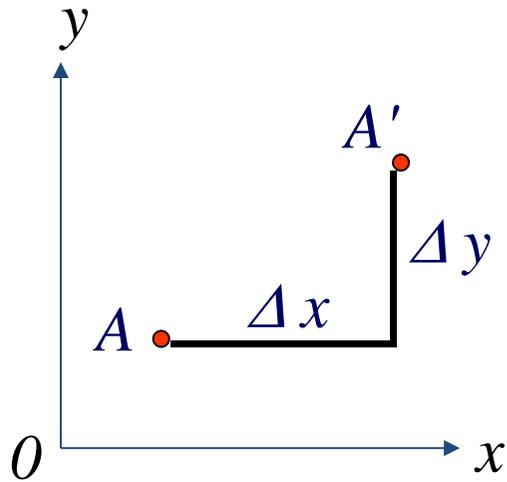
(2) 平面刚片

平面刚片—凡是已肯定为几何不变的部分

讨论体系的几何构造时是不考虑材料变形的，因此可以把
(1) 一根杆件 (2) 基础 (地基) (3) 体系中已被确定
为几何不变的部分看作是一个刚片

(3) 自由度

自由度—描述几何体系运动时，所需独立坐标的数目



一个平面刚片有三个自由度。

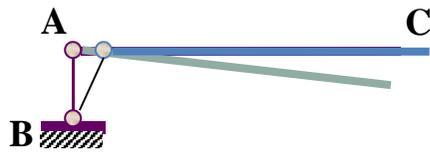
不考虑应变，一般机构都有至少一个自由度。

结构都必须几何不变。不考虑应变，若与基础相连，其自由度为**0**。若为平面自由体系（不与基础相连），则有**3**个自由度（空间为**6**个）

不考虑应变，凡是自由度数大于**0**（平面自由体系大于**3**）的体系均为几何可变体系。

(4) 约束

不考虑应变，如果体系有了自由度，为了使其具有承载能力，必须消除自由度，消除的办法是增加**约束**。



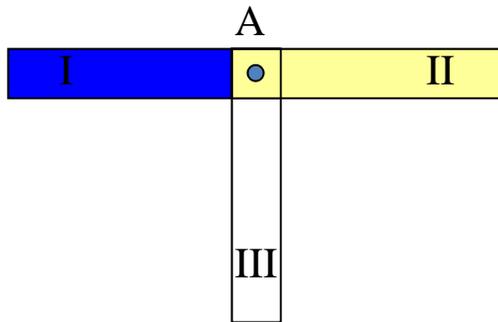
链杆— 1 个约束



单铰— 2 个约束



刚结点— 3 个约束



一个铰同时联结两个以上的刚片（包括地基），此铰称为复铰

联结 n 个刚片的复铰相当于 $(n-1)$ 个单铰

注意复铰与不完全铰(中间铰)的区别。

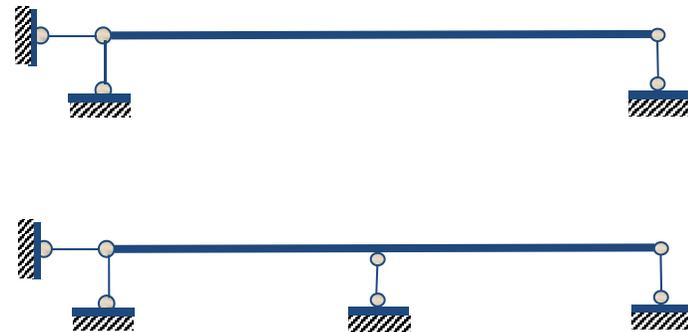
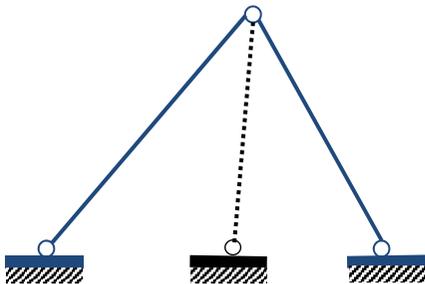


(5) 多余约束

多余约束—不能减少体系自由度的约束

瞬变体系一定存在多余约束。

有必要分清必要约束和非必要约束。

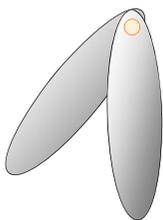
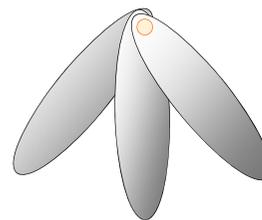


2-2 结构的计算自由度

上一节的内容给出了链杆、铰等带来的约束数。基于此可以计算系统的“自由度” W 。 W 称为结构的计算自由度。



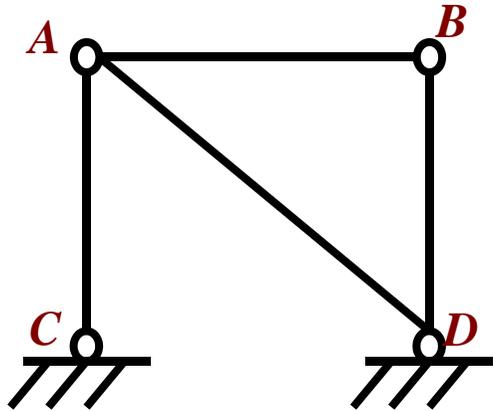
3

 $6 - 2 \times (1) = 4$  $9 - 2 \times (2) = 5$

$$W = 3m - 2h - r - 3g$$

m : 刚片数 h : 单铰数 r : 链杆数 g : 刚铰数

例：计算图示结构的计算自由度数



解：刚片数 $m = 4$

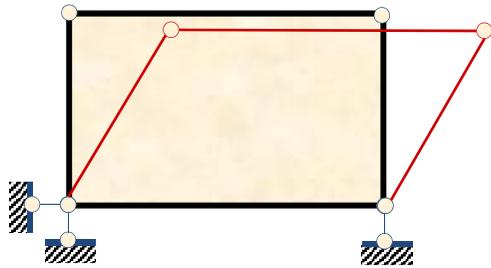
A复铰，连接三根杆，视为两个单铰

B、C——单铰

D——复铰（联接三个刚片）

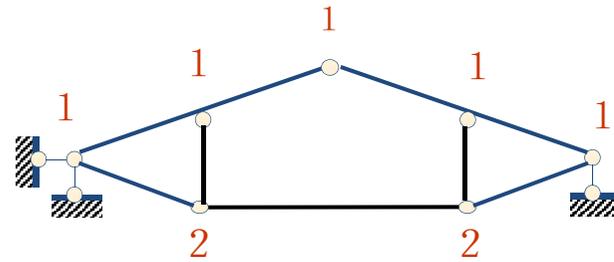
$$W = 3m - 2h = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$$

第二章 杆系几何构造分析



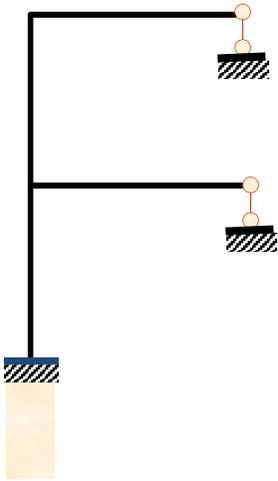
$$m = 4 \quad h = 4 \quad b = 3$$

$$W = 3 \times 4 - (2 \times 4) - 3 = 1$$



$$m = 7 \quad h = 9 \quad b = 3$$

$$W = 3 \times 7 - (2 \times 9) - 3 = 0$$



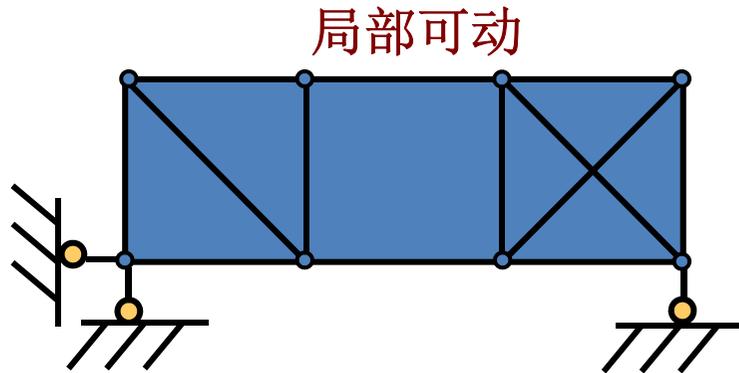
刚片1，刚结点1，链杆2

$$W = 3 \times 1 - 3 \times 1 - 2 = -2$$

或：刚片3，刚结点3，链杆2

$$W = 3 \times 3 - 3 \times 3 - 2 = -2$$

系统一定存在至少两个多余约束，此例中是两个（两次超静定）



刚片数 $m = 13$

单铰数 $h = 18$

支杆数 $r = 3$

$$W = 3m - 2h - r = 39 - 36 - 3 = 0$$

是否几何不变?

一些位置约束过多（多余约束），另外一些位置约束不够

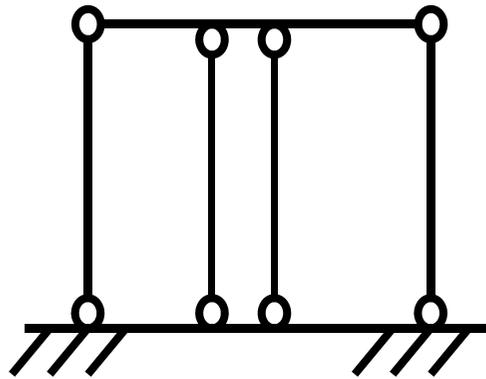
由于多余约束的存在， W 总小于等于真实自由度 S 。有

$$S - W = n$$

n 为多余约束的数量

由于 $S \geq 0$ ，有

$$n \geq -W$$



由于计算自由度总小于真实自由度，若计算自由度大于零，则系统必然几何可变。

若计算自由度小于等于零，系统未必几何不变。因此需要其它方法来判别体系的几何不变性。