§ 13-4 电场力的功、电势（电位）、电势能

（The Work of Electric Field force 、Electric Potential and the Energy)

一、电场力作功的特点

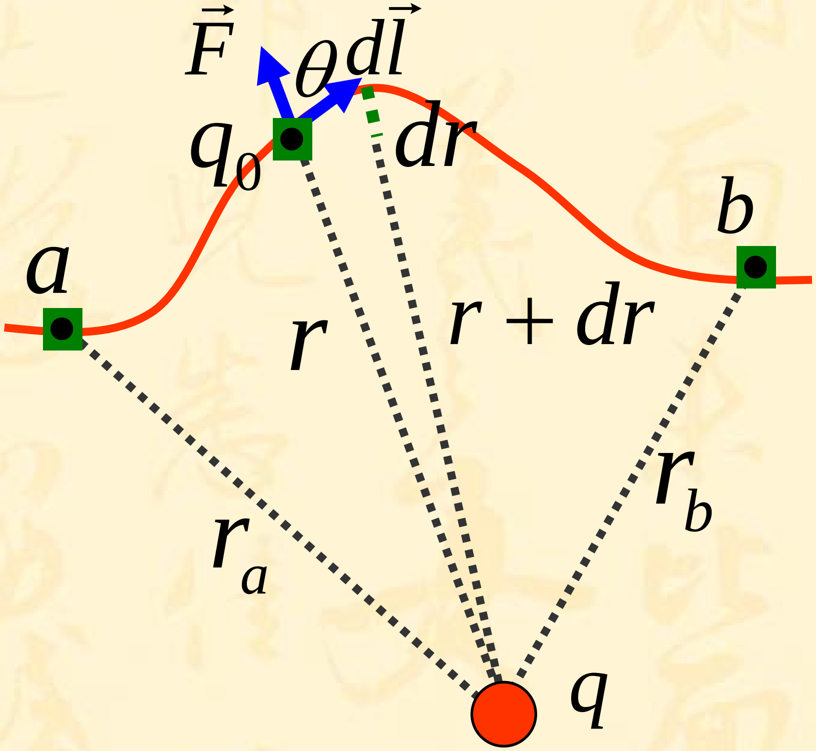
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 E \cos\theta dl$$

$$= q_0 E dr = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{= \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$



A_{ab}与路径无关，只与始末位置有关。

如果场源电荷不是一个点电荷，而是点电荷系，则：

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}} \right)$$

仍与路径无关

结论

在任何静电场中移动电荷时，电场力所做的功，仅与该电荷的电量及其始、末位置有关。即**静电场力是保守力**。

二、静电场的环路定理

$$A = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{ai}} \right) = 0$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

静电场强沿任一闭合环路的线积分恒等于零。

三、电势能

静电场力作功与路径无关，静电场是保守力场。可引入与位置有关的物理量——电势能。

类似于重力势能，从a到b静电场力作功A_{ab}应该等于a、b两点的电势能之差，即

$$A_{ab} = W_a - W_b = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由:

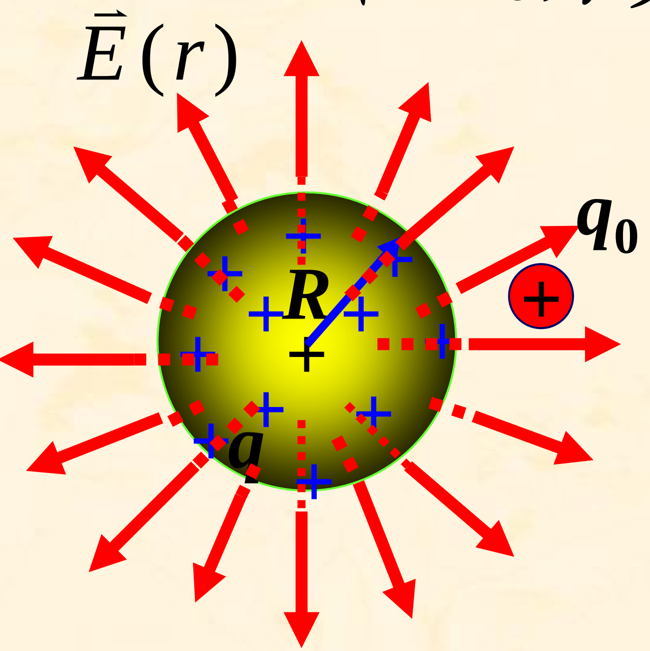
$$W_a - W_b = A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

若规定电场中某点（如 $\boldsymbol{b}$ 点）为电势能参考点（$W_b=W_{参}=0$），则定义任一其它点（如 $\boldsymbol{a}$ 点）的电势能:

$$W_a = A_{a\to 参} = q_0 \int_a^{参} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电荷（系统）q_0在电场中某点具有的电势能等于电场力将此电荷从该点移至参考点时电场力所作的功。

注意：当电荷分布在有限区域内时，理论研究常选取∞远为参考点。则:



$$W_a = A_{a\to\infty} = q_0\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

讨论:

- 电势能为场源电荷与试验电荷系统所共有。
- 即电势能是场源电荷与试验电荷整体之间的相互作用能。
- 势能的值具有相对性，与参考点的选取有关。

四、电势

1、电势差（电压）

W_{ab}与q_0有关，而W_{ab}/q_0与 q_0无关，由电场在a、b两点的性质决定，反映了电场的能的性质.

定义：a、b两点的电势差:

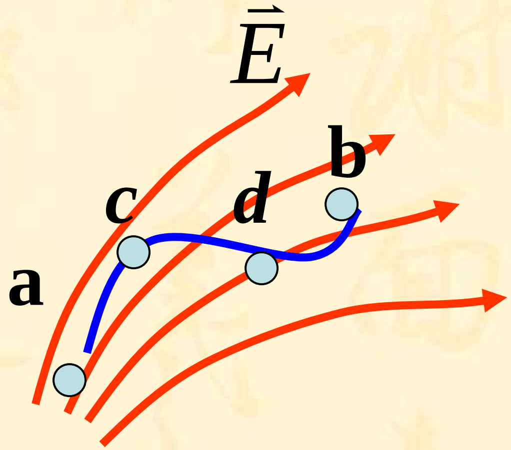
$$\boxed{U_{ab}=U_a-U_b=\frac{W_{ab}}{q_0}=\frac{A_{ab}}{q_0}=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

电场中a、b两点间的电势差在数值上等于将单位正电荷从a移到b时电场力所做的功。

讨论:（1）电场中两点间的势差与计算时所取路径无关，也与势能零点的选取无关。

（2）电场中两点间的电势差等于沿此两点间任一路径上各段电势差的代数和。

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cd} + U_{db}$$



2、电势

定义:

$$\boxed{U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{参} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

电场中某点的电势等于单位正电荷在该点所具有的电势能。或者说等于将单位正电荷从该点移到参考点时，电场力所作的功。

讨论:

$$U_a = \frac{w_a}{q_0} = \int_a^{参} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

★电势是描述电场本身性质的物理量，而与试验电荷无关。

★电场中某点的电势是相对于参考点（零电势点）而言的。

★电场力作功与电势差的关系:

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 (U_a - U_b)$$

★实验电荷在场中某点的电势能:

$$W_a = q_0 U_a$$

电势参考点的选取原则:

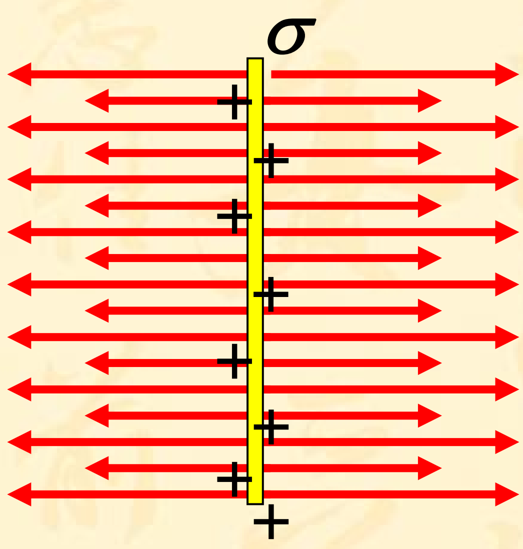
♠零电势点允许有一定的任意性。但要保证电势的表达式有意义。

♠合理选择参考点可使问题简化。

♠理论上常选“∞”处作参考点。但有以下限制:

①电荷分布不延伸到无限远;

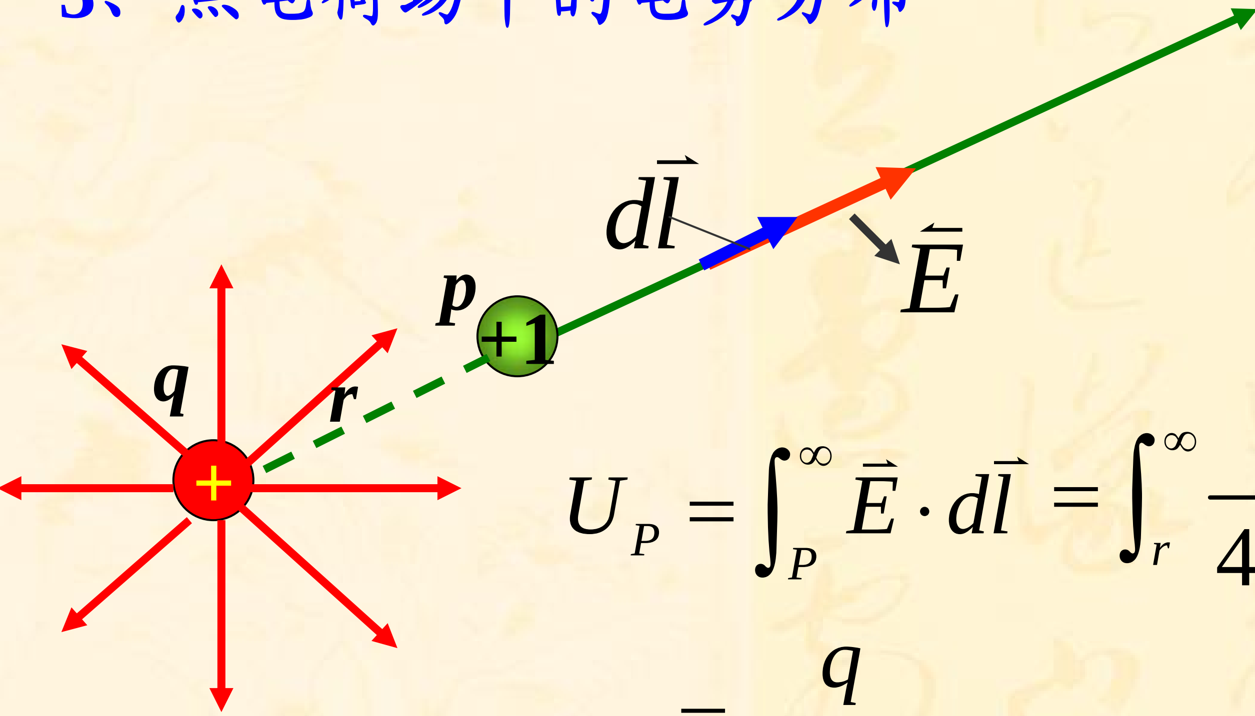
②电荷分布虽延伸到无限远，但电荷的代数和为零。(如带等量异号电荷的无限长细线)



♠实际中常用“大地”作参考点。

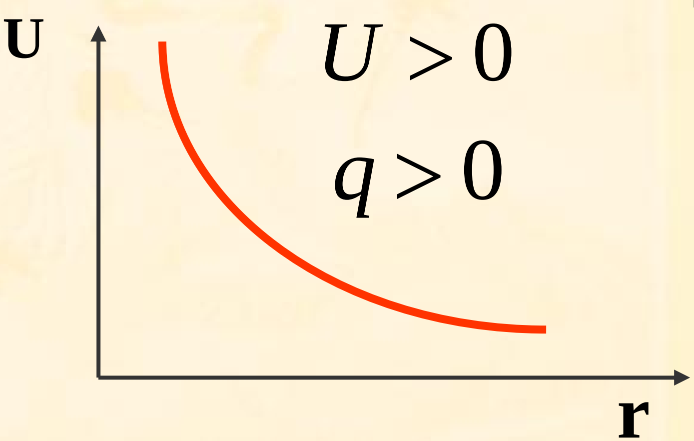
3、点电荷场中的电势分布

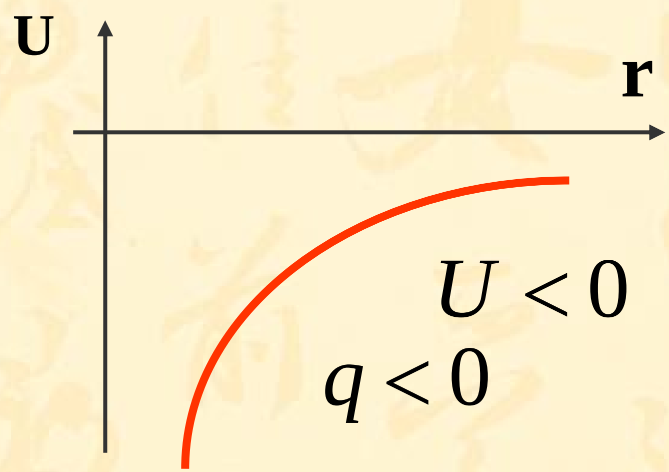
以无限远为参考点，选择沿矢径 **r** 的路径方向。



$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 0^{\circ}\, dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

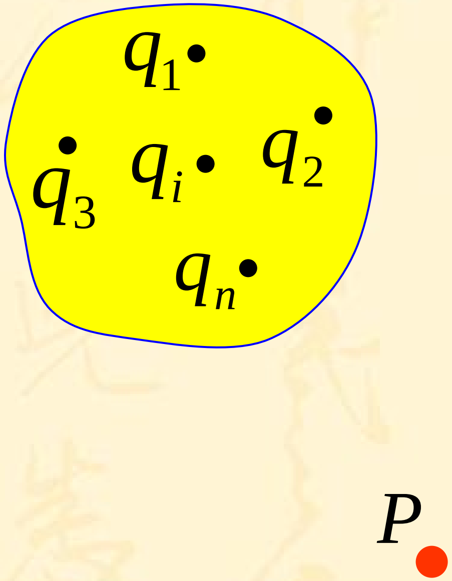




$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

4、电势叠加原理

（1）点电荷系的电势



$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i} = \sum_{i=1}^{n} \int_P^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

点电荷系的电场中某点的电势，等于各个点电荷单独存在时在该点所产生电势的代数和.

（2）连续带电体的电势

$$U_P = \int dU_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r}$$

5、电势的计算

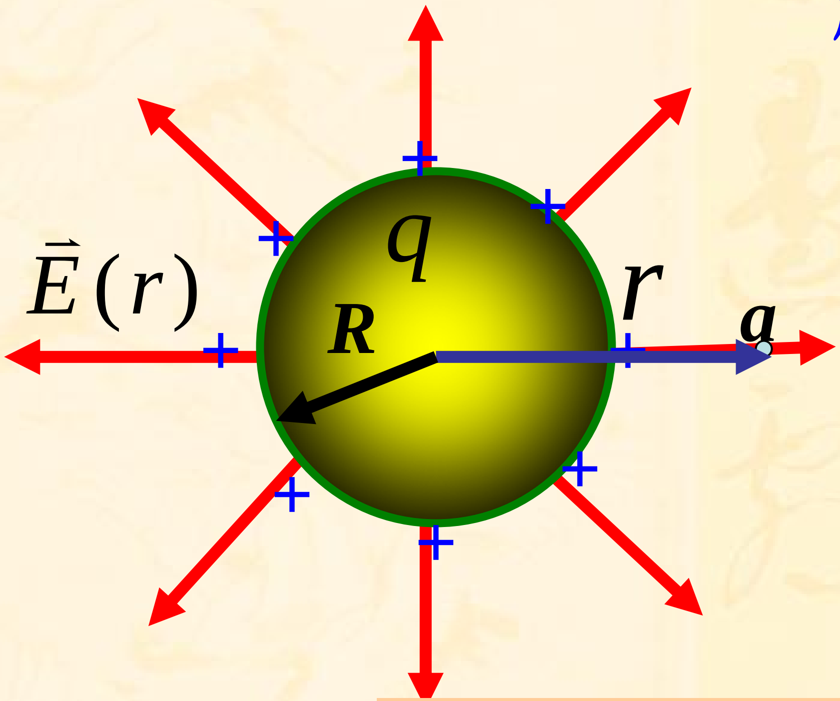
电势的计算有两种方法:

（1）先求出场强分布（多种情况下由高斯定理可以求得）。

再由 $U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 求出;

（2）由电势叠加原理计算。

例1: 求均匀带电球壳的电场中的电势分布，设球壳带电q，球半径为R。



解: 以无限远为参考点。

1. 球外:

$$U_a = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

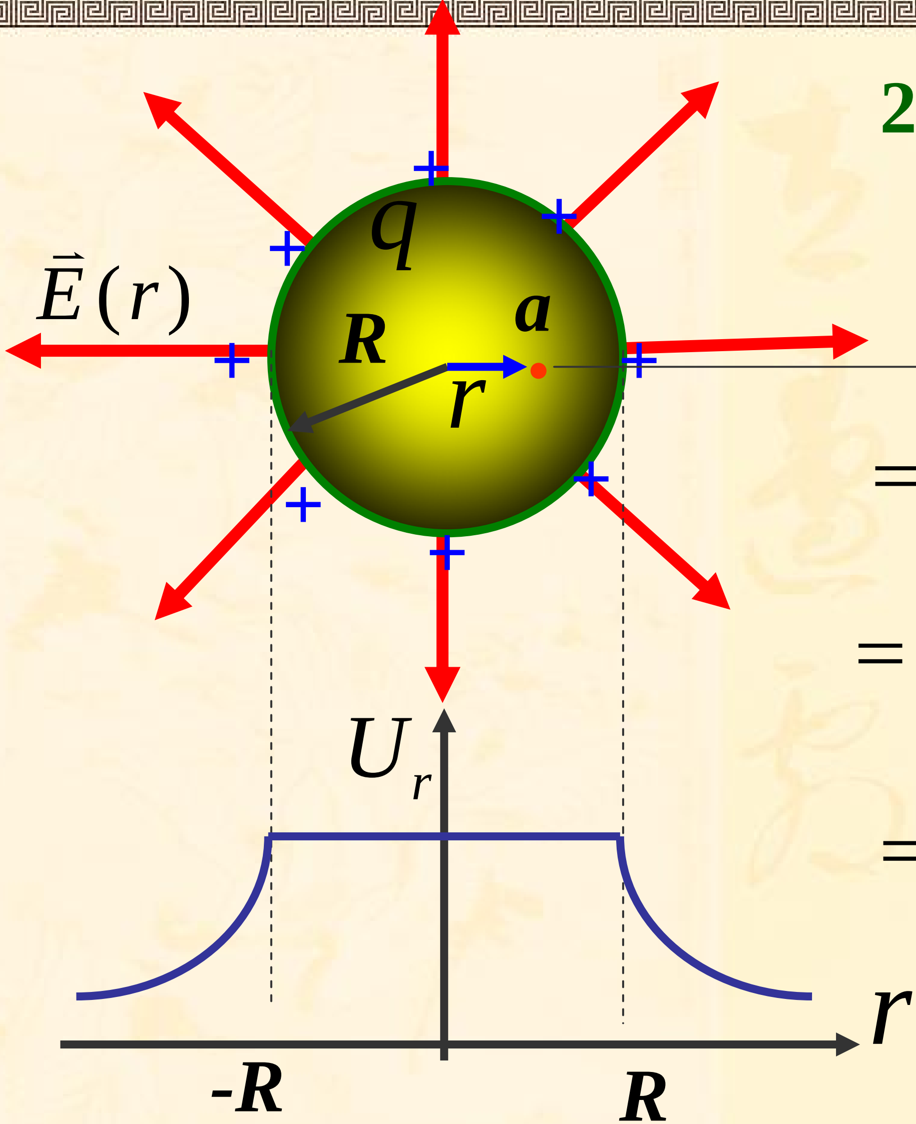
$$= \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 0^\circ dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电场分布

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \cdots (0 \le r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdots (R \le r < \infty) \end{cases}$$

2. 球内:



$$U_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\boxed{\vec{E}_1(\text{球内}) = 0}$$

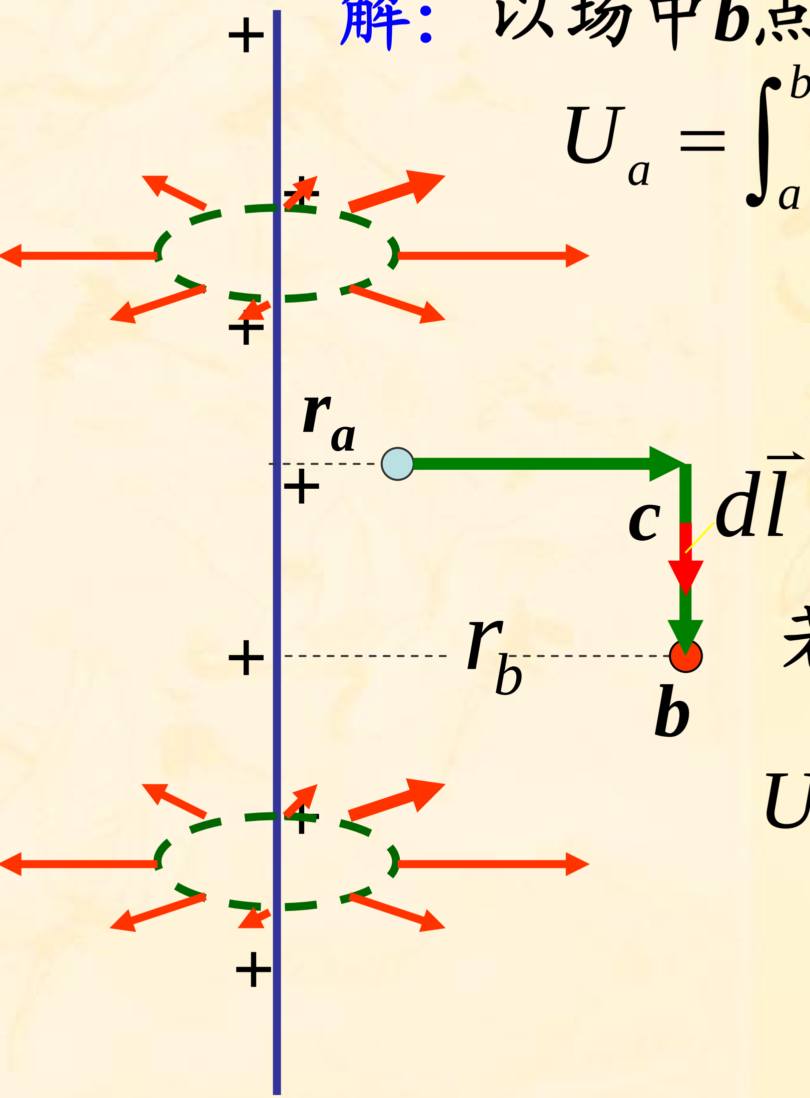
$$= const$$

$$U(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdots (R \le r < \infty) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdots (o \le r < R) \end{cases}$$

例2: 一根无限长均匀带电细线，线密度为λ，求距导线 r_a处一点a的电势。

注意参考点也不能在细线上，即 $r=0$ 处.

解: 以场中b点为参考点



$$U_a=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{r_a}^{r_c}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr+\int_{r_c}^{r_b}E\cos 90^\circ dl$$

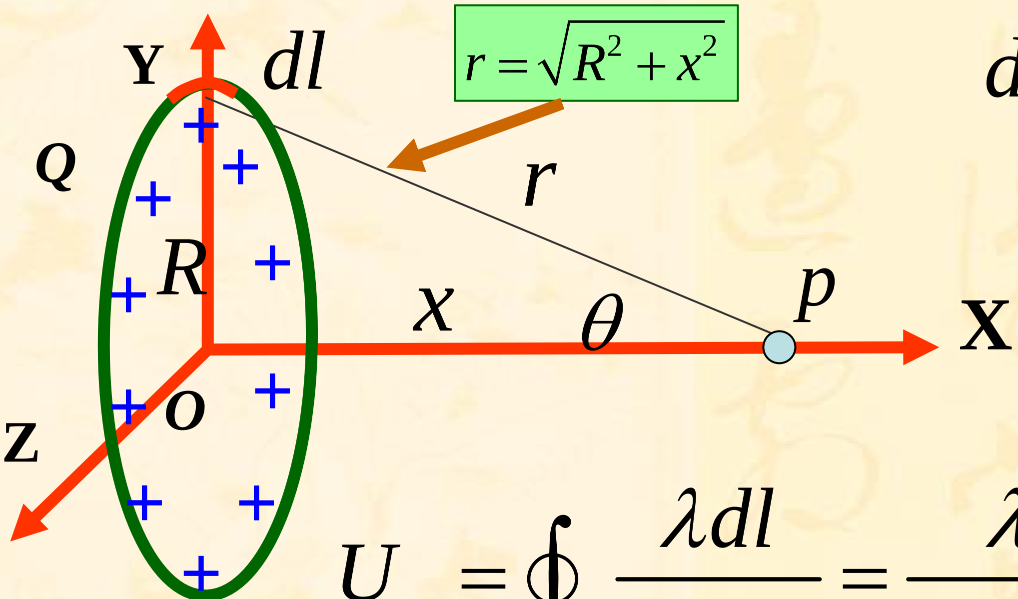
$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

若以∞远为参考点，则

$$U_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r_a}^\infty\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r_a}^{\infty}\to\infty$$

例3：有均匀带电Q的细圆环，环半径为a，试求通过环中心垂直轴线上一点x的电位。



解：分割求和

$$dq=\lambda dl$$

$$dU=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

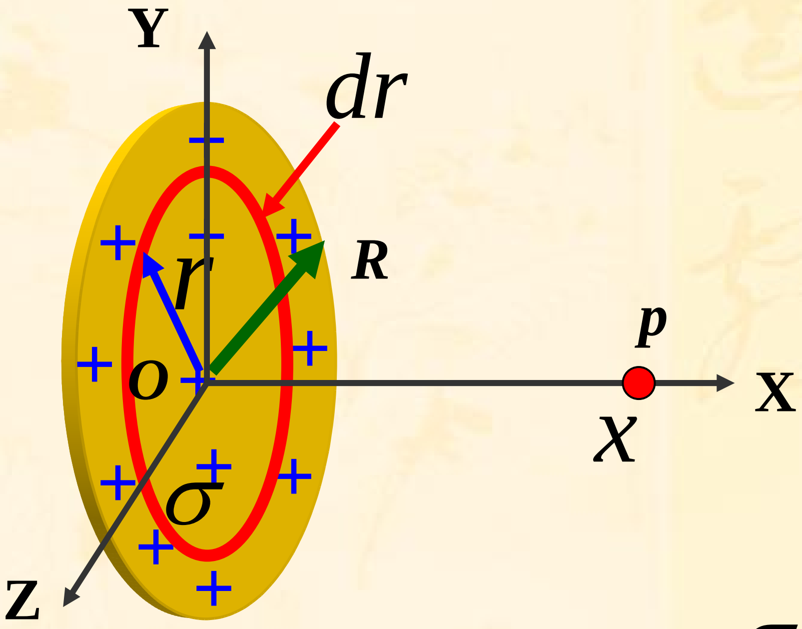
$$U_p=\oint_L\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint_L dl=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}2\pi R$$

$$\boxed{U_p=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}}$$

$$(\lambda=\frac{Q}{2\pi R})$$

例4: 一薄带电圆盘，半径为R，面电荷密度为σ，求中垂线上一点P的电势。P点离盘心距离为x。

解: 分割成许多细圆环

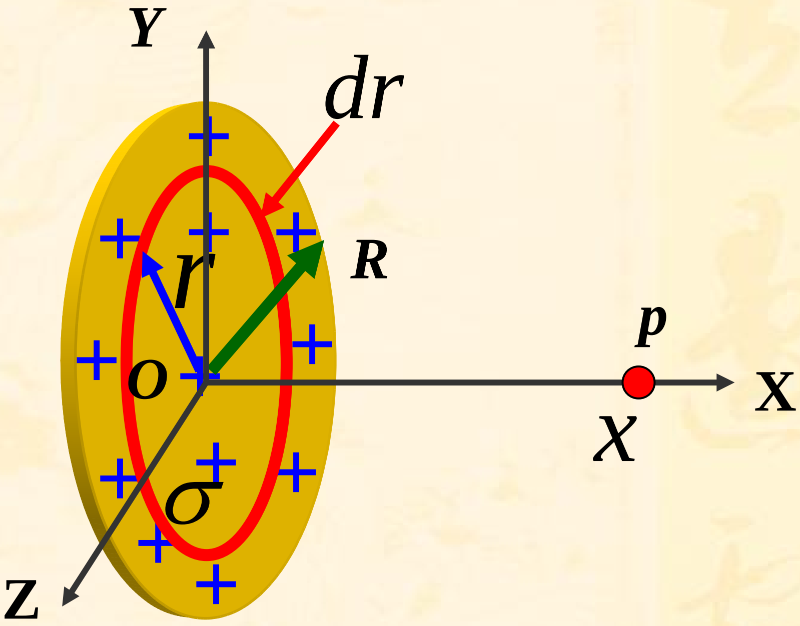


$$ds = 2\pi r dr$$

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}$$



$$U_p = \int dU$$

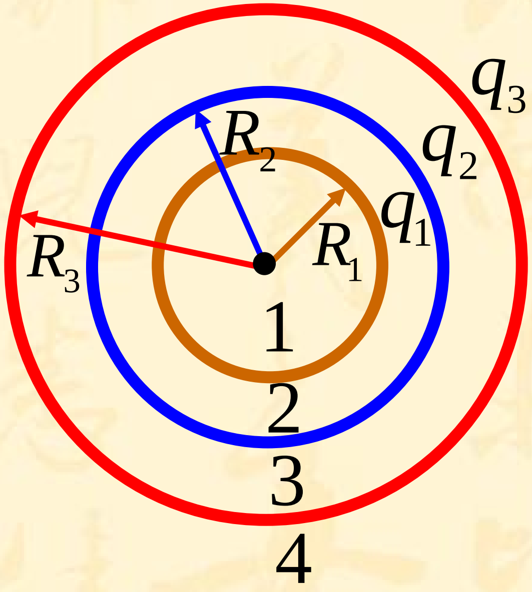
$$= \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

$$\boxed{U_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - x)}$$

例5: 三个同心带电导体球壳，半径分别为R_1,R_2,R_3，求电势分布。

解: **方法一:** 由高斯定理得



$$E_1 = 0 \quad \left(r \le R_1\right)$$

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \left(R_1 \le r \le R_2\right)$$

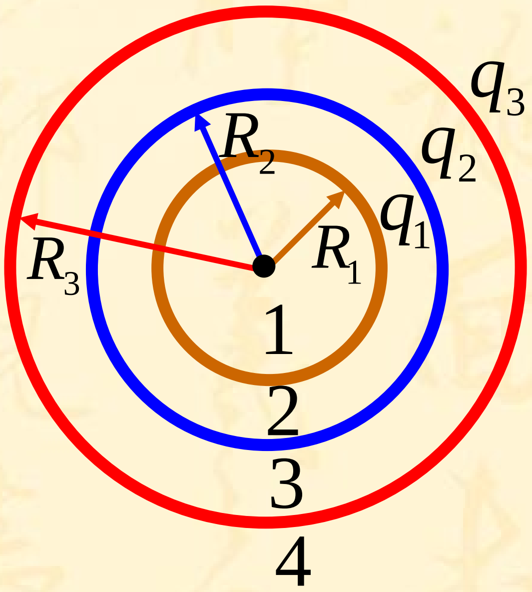
$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \left(R_2 \le r \le R_3\right)$$

$$E_4 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \left(r \ge R_3\right)$$

$$U_1 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr$$

$$+ \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{\infty} E_4 dr$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

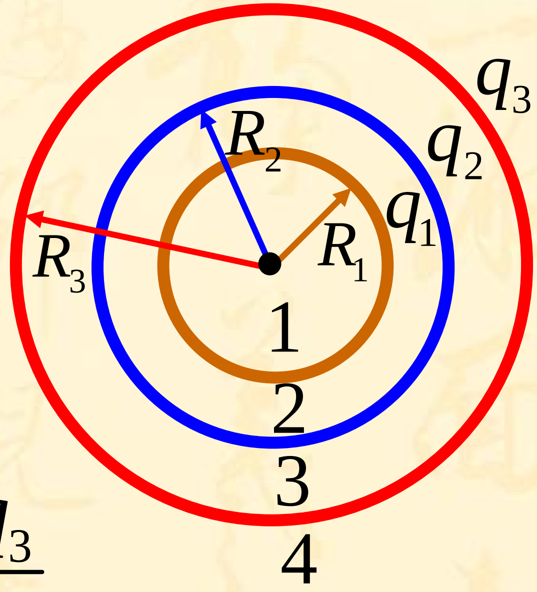


$$U_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{\infty} E_4 dr$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_3=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_3}E_3dr+\int_{R_3}^{\infty}E_4dr$$

$$=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$



$$U_4=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}E_4dr=\frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

方法二： **见P.13**

（1）区域1，处于球1、球2、球3之内

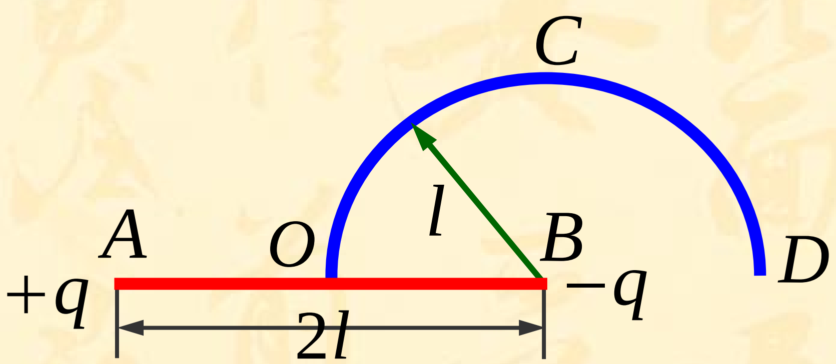
$$\therefore U_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（2）区域2，处于球1之外，球2、球3之内

$$\therefore U_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

同理可得U_3，U_4

例6: *AB*间距离为2*l*，*OCD*是以*B*为中心,以*l*为半径的圆弧，*A*、*B*处分别放有点电荷+*q*和 -*q*，则把 *Q*（*Q*<0）的点电荷从*D*点沿路径*DCO*移到*O*点的过程中，电场力作功为多少？



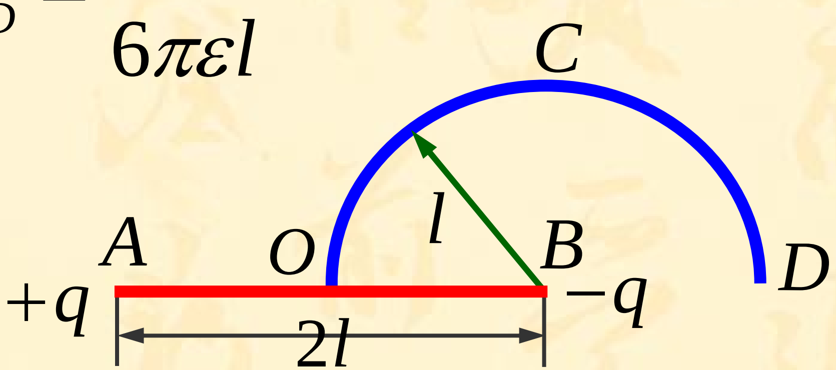
解: $U_0 = 0$

$$U_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon(3l)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon l} = \frac{-q}{6\pi\varepsilon l}$$

则Q的电势能 $W_O = 0,\quad W_D = QU_D = \dfrac{-Qq}{6\pi\varepsilon l}$

电场力作功为电势能增量的负值

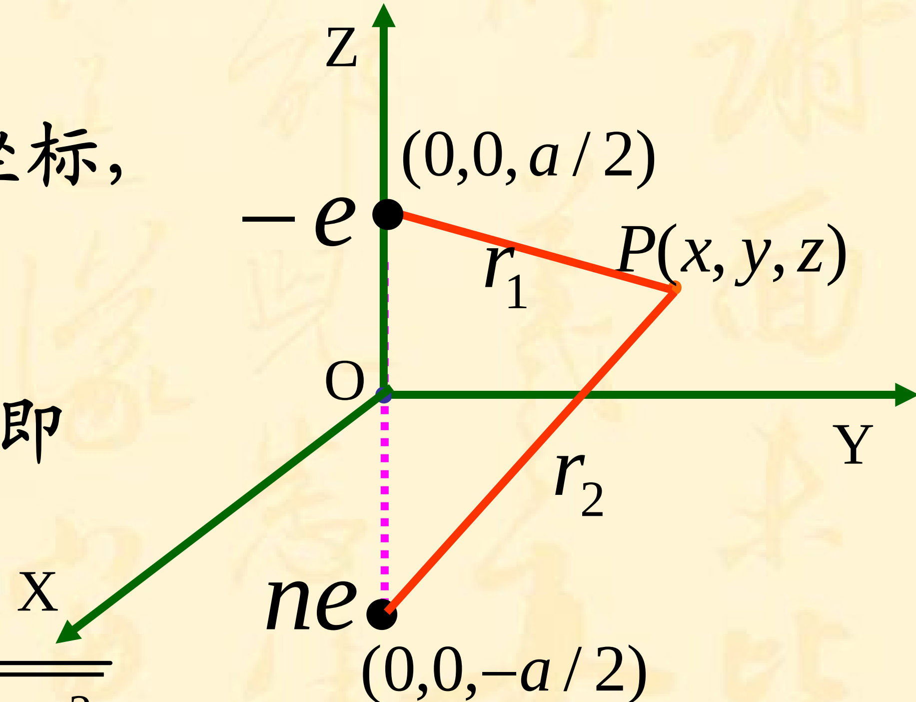
$$A_{DCO} = -(W_O - W_D) = W_D = \frac{-Qq}{6\pi\varepsilon l}$$



例7: 两个异号点电荷***ne***和***-e***（**n>1**）。相距为***a***，**1**、求空间任一点的电势；**2**、证明电势为零的面为一个球面。

解:（**1**）选取如图所示的坐标，

则***P(x,y,z)***点的电势为:



$$U_P=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$ 即

$$U_p=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2}}-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2}}$$

（2）令U=0有

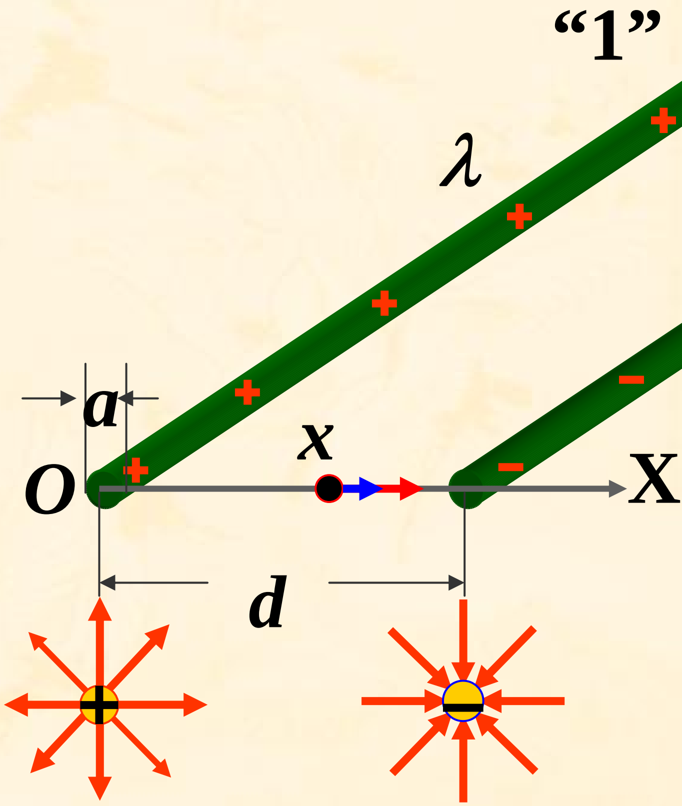
$$\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=0 \longrightarrow \frac{r_2}{r_1}=n$$

即 $$\sqrt{\frac{x^2+y^2+\left(z+{a}/{2}\right)^2}{x^2+y^2+\left(z-{a}/{2}\right)^2}}=n$$

$$\longrightarrow \boxed{x^2+y^2+\left[z-\frac{a(n^2+)}{2(n^2-1)}\right]^2=\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2}$$

显然上式为一个球面方程。

例8: 两根均匀带等量异号电荷的平行直导线线密度为λ，半径为a，两线中心轴线间的距离为d，求两导线间的电压。（$d >> a$）



解:

建立坐标OX

单根长直带电线的电场

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{i} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\hat{i}$$

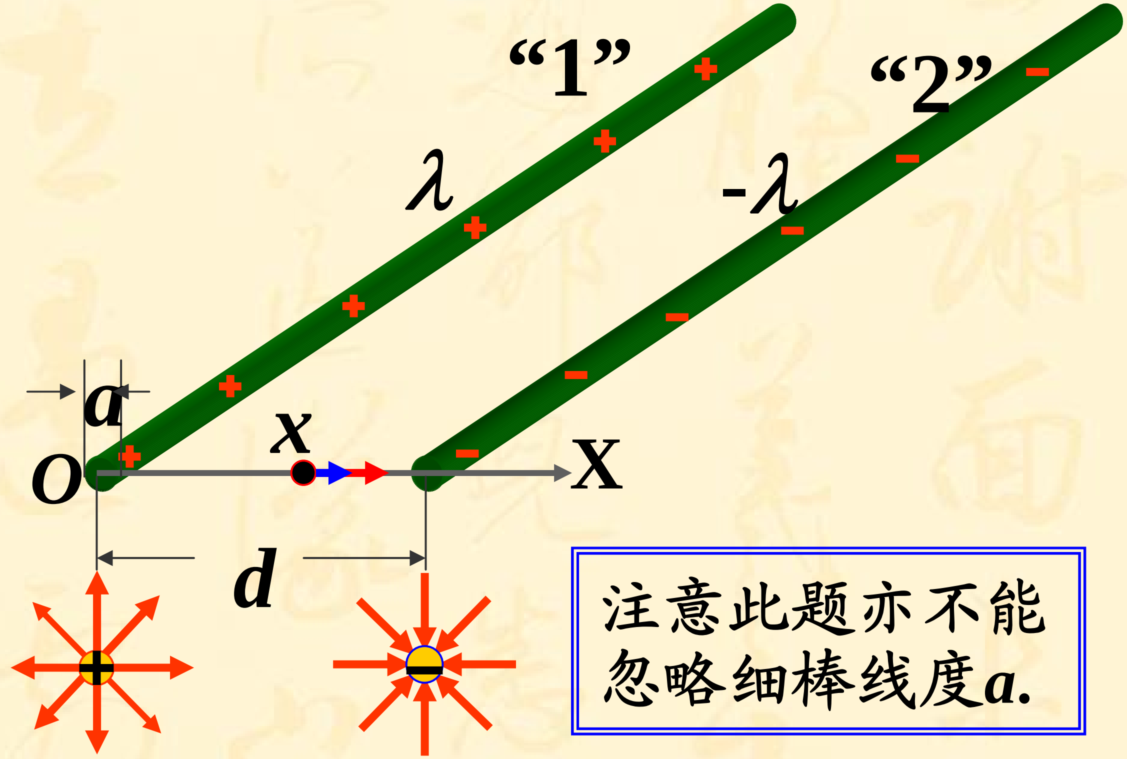
$$\vec{E}(x)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{i}$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\hat{i}$$

$$\therefore U_{1.2}=\int_a^{d-a}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_a^{d-a}[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}]\cos 0^\circ dx$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\frac{d-a}{a}-\ln\frac{a}{d-a})=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$



注意此题亦不能忽略细棒线度*a*.