§13—3电力线、电通量、高斯定理（ Electric line of force 、Electric flux、Gauss Theorem ）

一、电力线

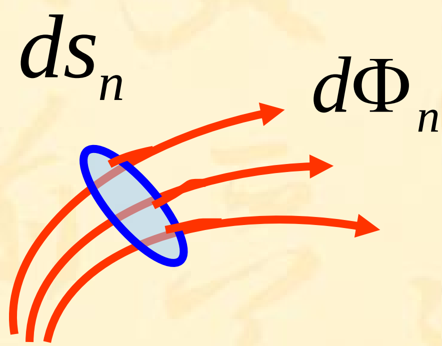
（电场强度的图示法）

规定:

1. 线上每一点切线方向表示该点电场强度的方向;

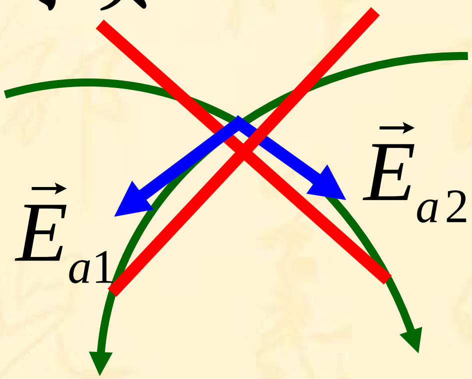
2. 通过垂直于电场方向的单位面积上的电力线数目（电力线数密度）等于该点的电场强度值.

$$\boxed{E = \frac{d\Phi_n}{ds_n}}$$



电力线特点:

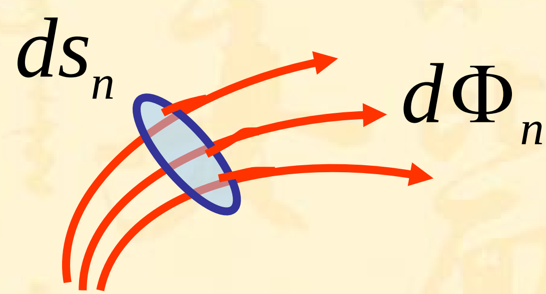
1. 起始于正电荷（或“∞”远），终止于负电荷或“∞”远）。



2. 任何两条电力线不相交。

3. 电力线越密的地方，场强越大；电力线越疏的地方，场强越小。

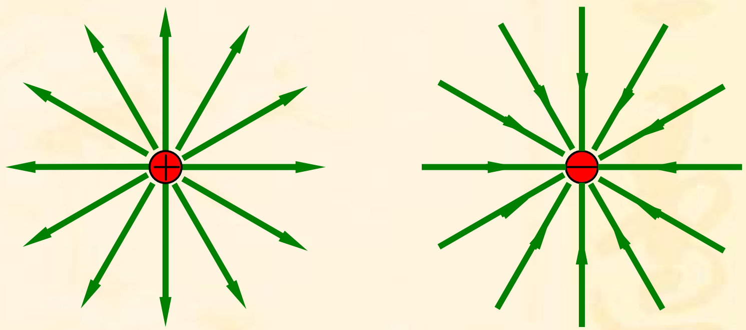
$$\boxed{E=\frac{d\Phi_n}{ds_n}}$$



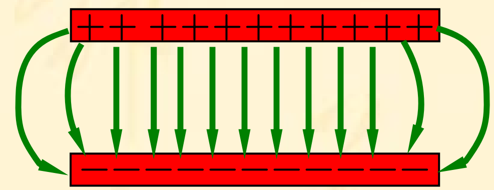
电力线作用有：

- 说明场强的方向；
- 说明电场的强弱；
- 说明电场的整体分布。

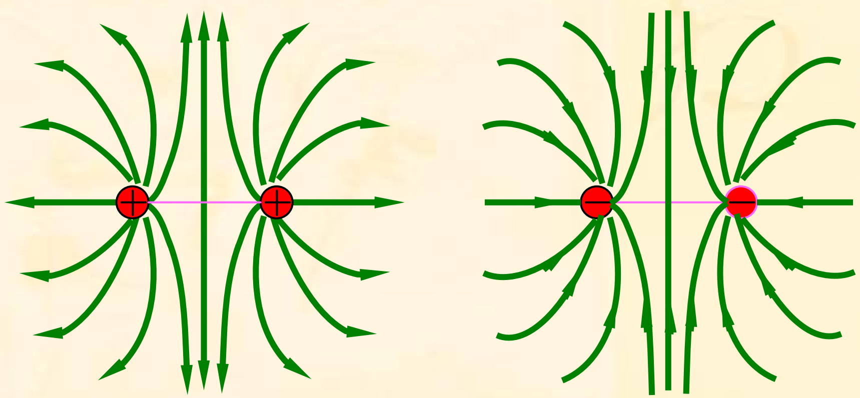
几种常见的电力线



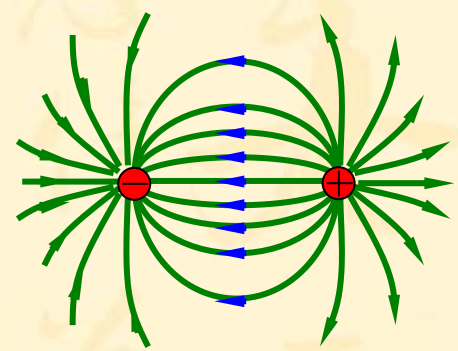
（a）点电荷的电场线



（b）一对带等量异号电荷的平行板电场线



（c）两个同号点电荷的电场线



（d）两个异号点电荷的电场线

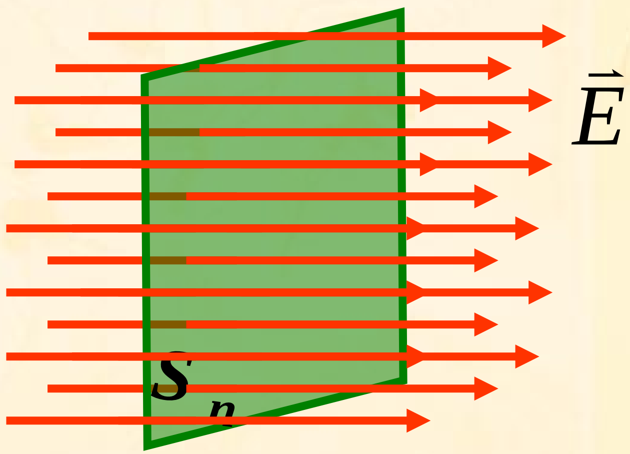
二、电通量

1. 定义： 通过某一曲面的电力线数，叫通过这一曲面的电通量。记为“Φ_e”。

$$E = \frac{d\Phi_n}{ds_n}$$

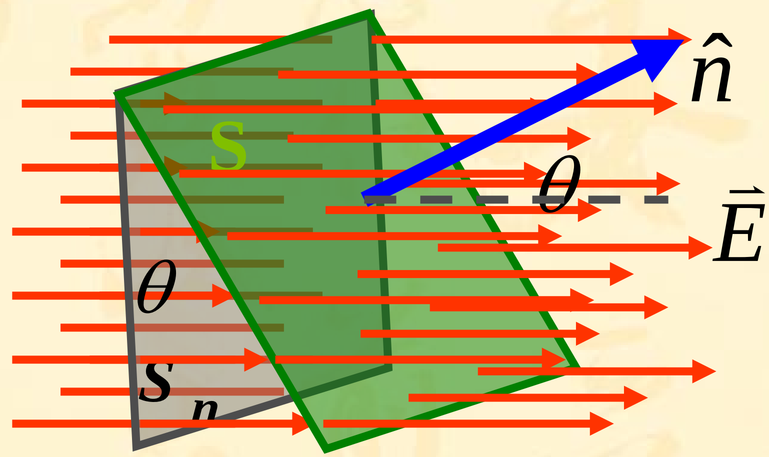
2. 计算： **A.** 均匀电场

$S \perp \vec{E}$ 时：



$$\Phi_e = ES_n$$

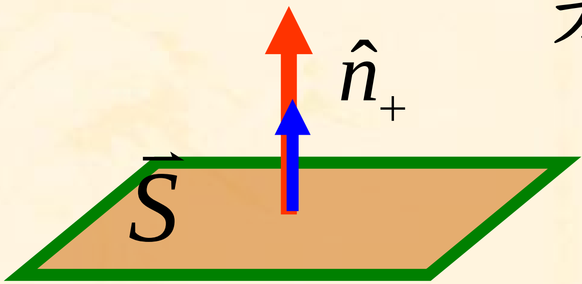
S与$\vec{E}$成θ角时



$$\Phi_e = ES_n = ES\cos\theta$$

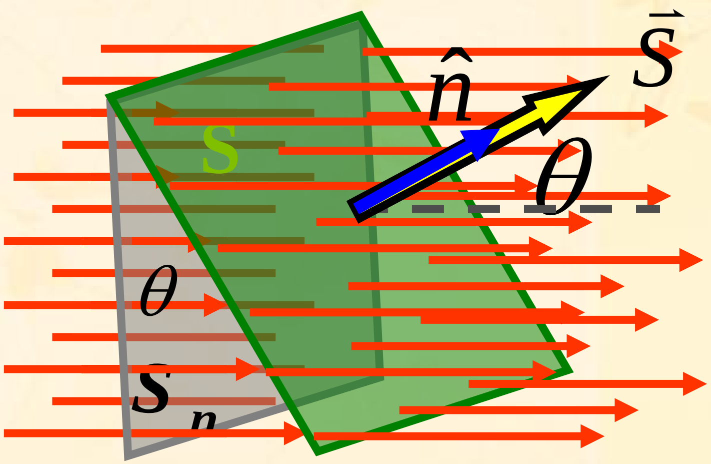
定义面积矢量 $\vec{S}$ 大小：面积大小 S

方向：面积正法线方向。



面积有两个面，规定一个面为正面，则另一面则为负面。

S与$\vec{E}$ 成 θ 角时

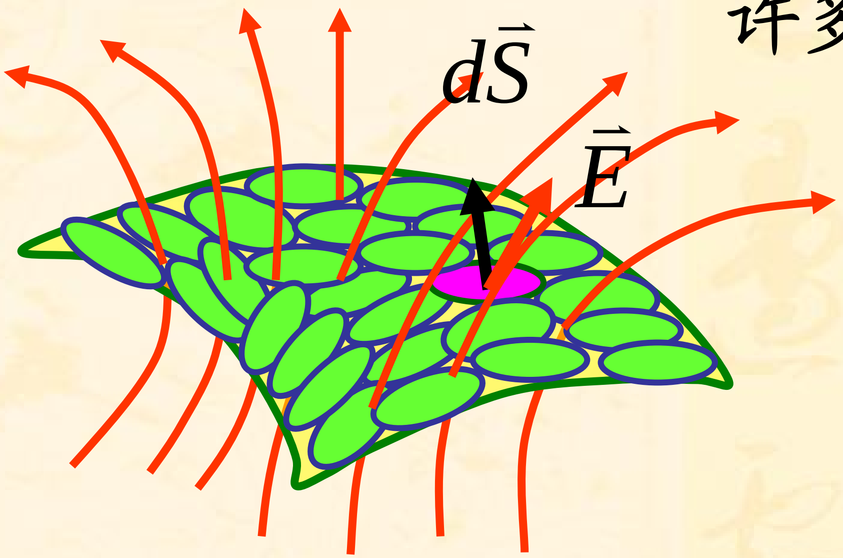


所以电通量：

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_e &= ES\cos\theta \\ &= \vec{E}\cdot\vec{S}\end{aligned}}$$

$$\Phi_e = ES_n = ES\cos\theta$$

B. 非均匀场 $\vec{E}$

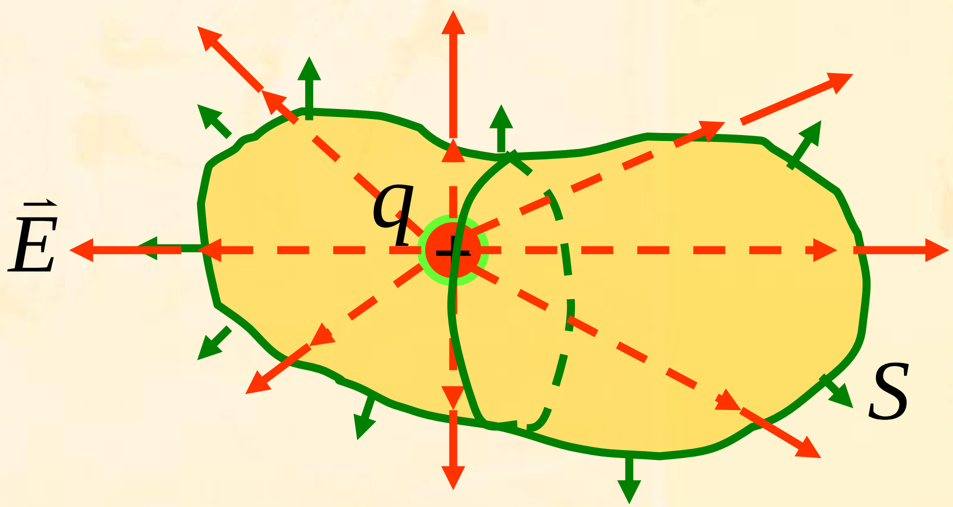


因各点场强不一样。分割成许多小面元，任取一面元

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

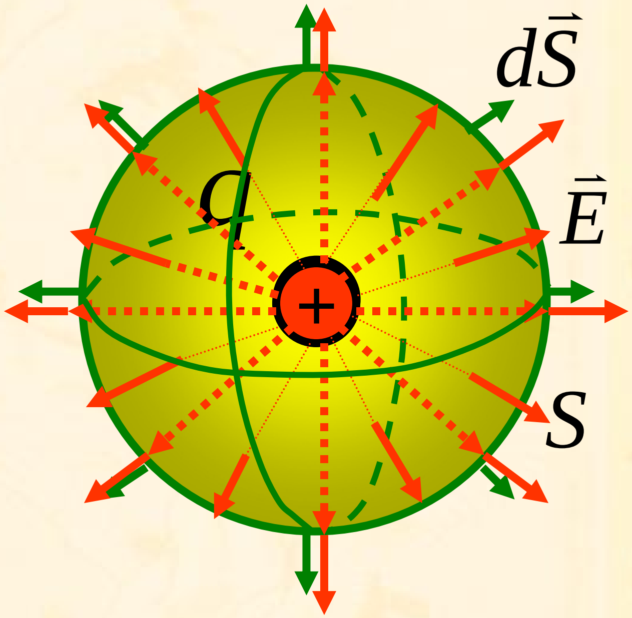
C. 通过封闭曲面的电通量



规定面积正法线
由曲面指向外

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

例：在一球面内有一点电荷**q**，求通过此球面的电通量。



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

注意：
$\vec{E}$ 是球面上的电场强度

$$\Phi_e = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \oint_S dS$$

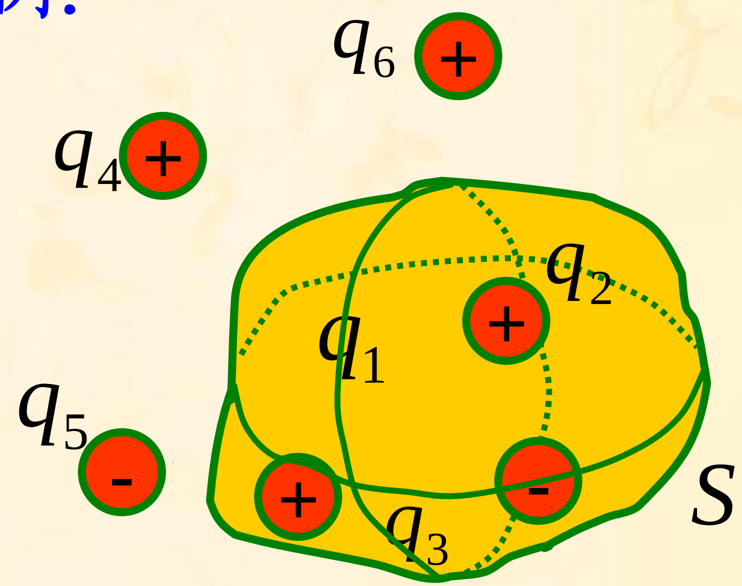
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

三、高斯定理

穿出任一闭合曲面的电通量Φ_e等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0，而与闭合面外的电荷无关。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S面内} q_i$$

例:



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + q_3)$$

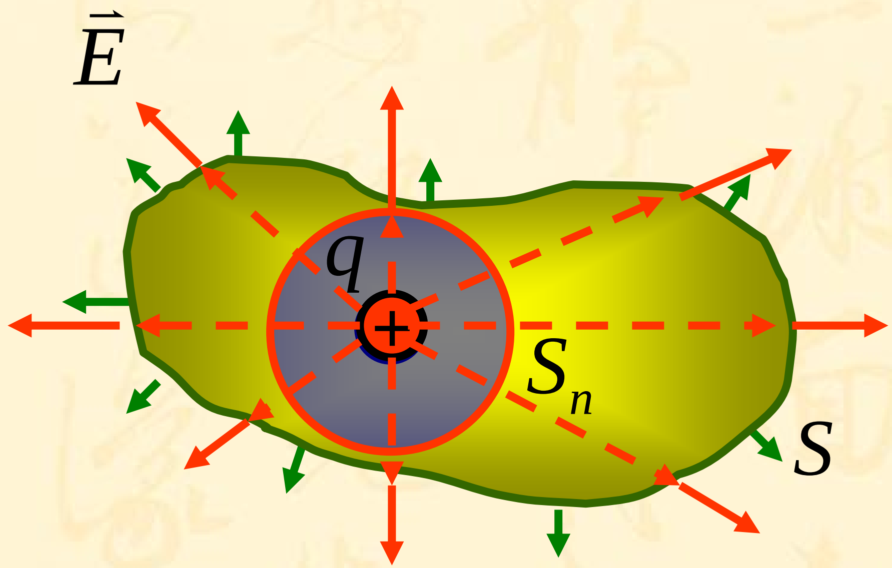
证明:

1. 仅有一个点电荷

A. 点电荷在S面内:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

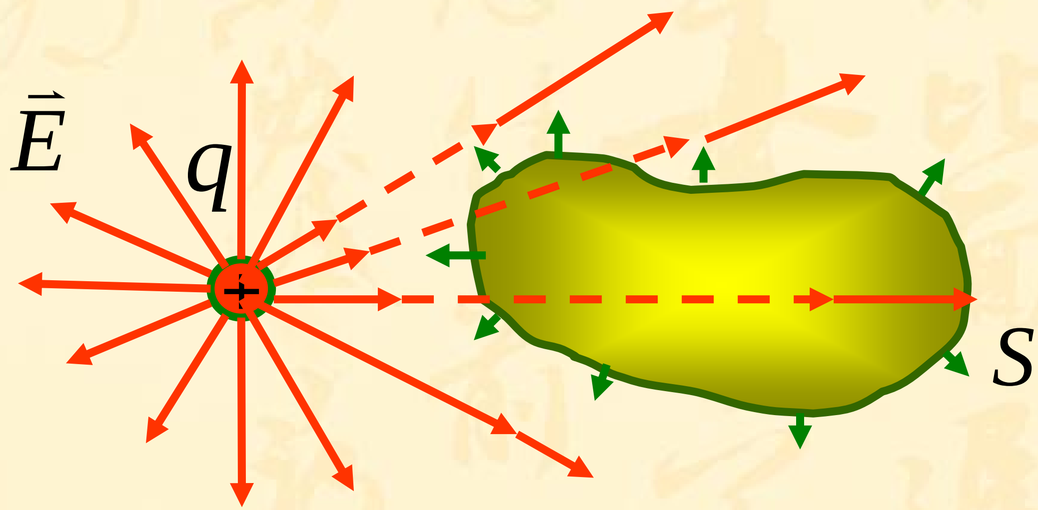
$$= \oint_{S_n} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



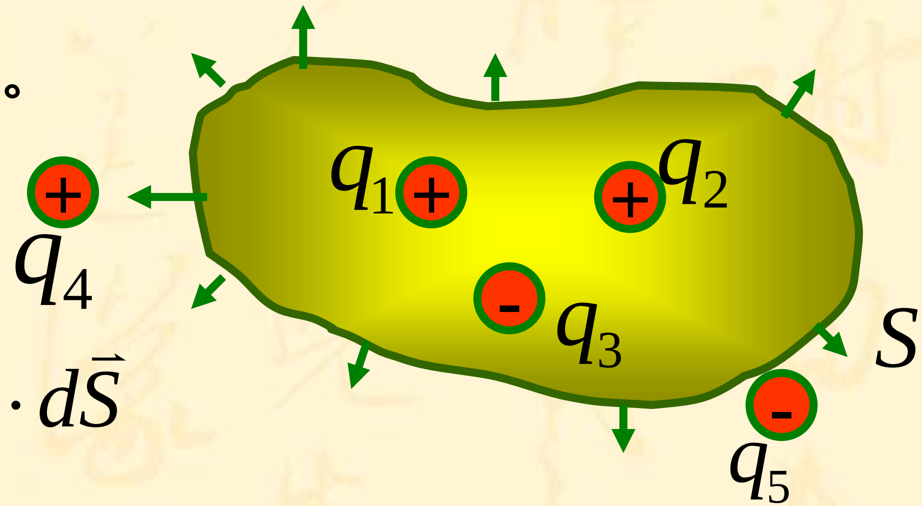
B. 点电荷在S面外:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= 0$$



2. ***S*面内有** $q_{1,}q_{2,}\cdots q_n$ **,共*n*个电荷；*S*面外有** $q_{n+1,}q_{n+2,}\cdots q_{n+k}$ ***k*个电荷。**



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

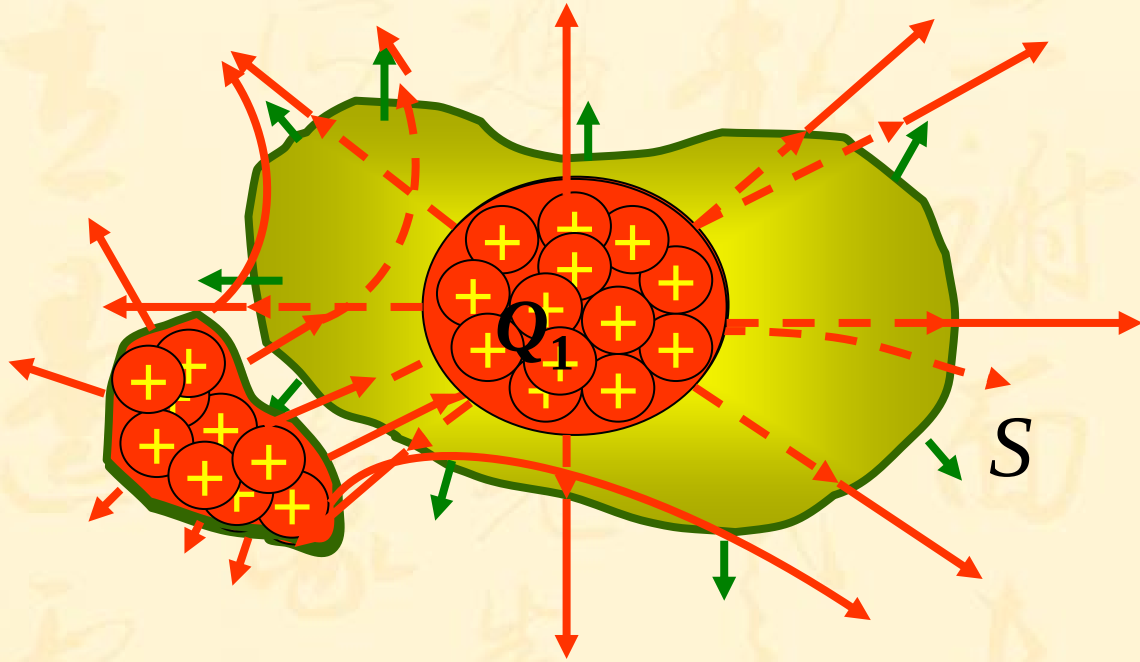
$$= \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_{n+k})\cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2\cdot d\vec{S} + \cdots + \oint_{S_n} \vec{E}_n\cdot d\vec{S}$$

$$+ \oint_S \vec{E}_{n+1}\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_{n+2}\cdot dS + \cdots + \oint_{S_{n+K}} \vec{E}_{n+k}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} + 0 + \cdots + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

3. S 面内外有带电体



带电体是点电荷的集合。同样可证明高斯定理的结论。

定理证毕!

穿出任一闭合曲面的电通量Φ_e等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0，而与闭合面外的电荷无关。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S面内} q_i$$

讨论: ● 高斯定理的数学表达式中E是S面内外所有电荷在S面上所产生的总场强。

● Σq_i仅指S面内的所有电荷的代数和。

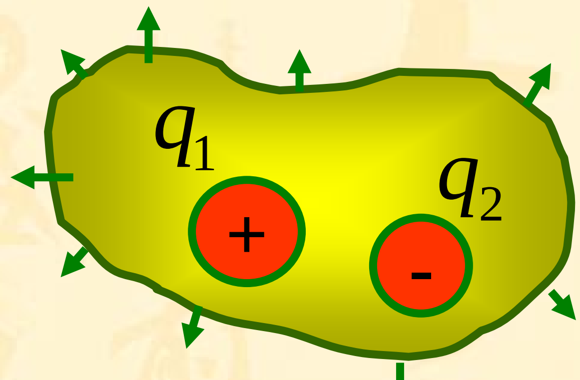
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S\text{面内}} q_i$$

$\boxed{S\text{面内、外所有电荷在}S\text{面上产生的场强}}$

$\boxed{S\text{面内电荷代数和}}$

● 当 $\Phi_e > 0$ 时，$\Sigma q_i > 0$

面内有正电荷，但并非一定仅只有正电荷



$q_1 > |q_2|$

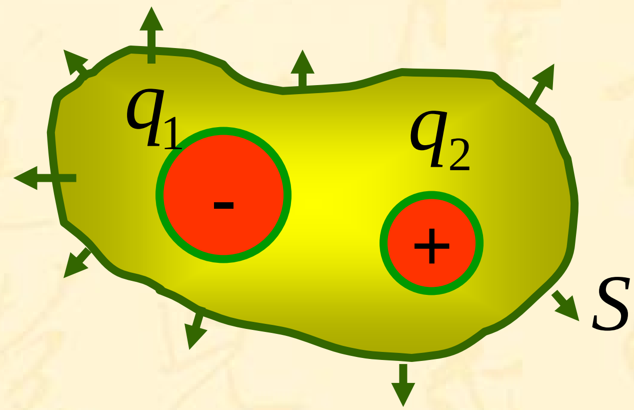
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S面内} q_i$$

当 $\Phi_e < 0$时，$\Sigma q_i < 0$

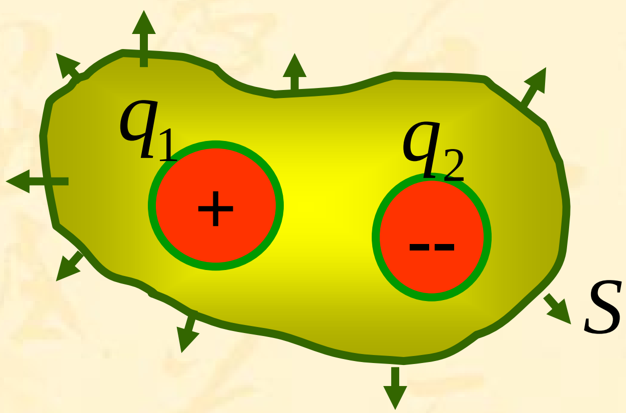
面内有负电荷，但并非一定仅只有负电荷.

当 $\Phi_e = 0$ 时，$\Sigma q_i = 0$

面内净电荷为零，但并非一定没有电荷。

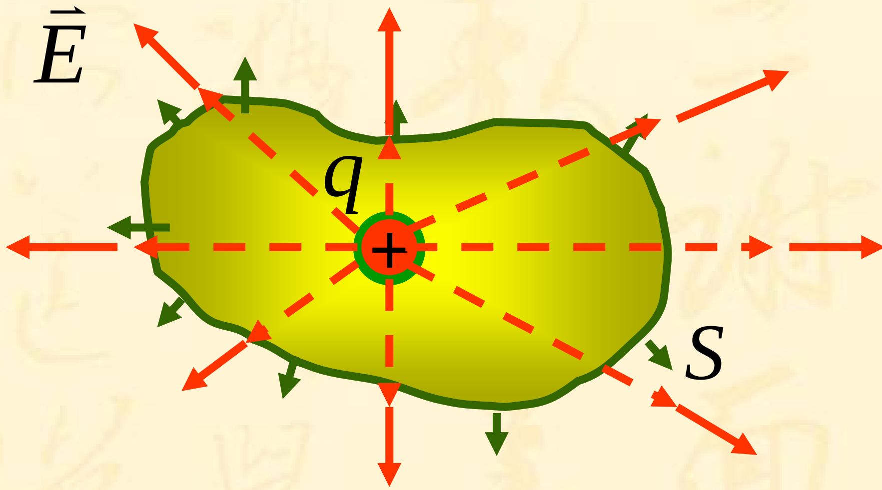


$$|q_1| > q_2$$



$$|q_2| = q_1$$

● 静电场是有源场



当S面内只有正电荷

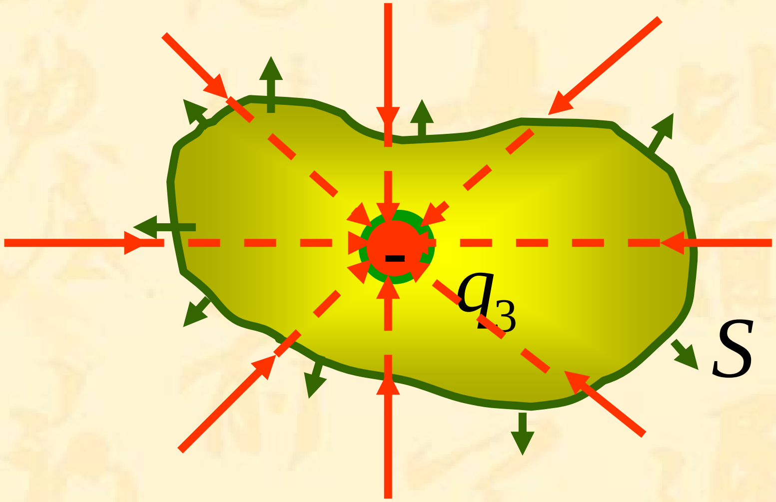
$\Phi_e > 0$，从S面内发出正通量

正电荷称为源头

当S 面内只有负电荷

$\Phi_e < 0$，从S面内发出负通量（吸进通量）

负电荷称为负源头（尾闾）



这种有源头、尾闾的场称为有源场。高斯定理是说明静电场基本性质的方程

四、利用高斯定理计算具有对称性的电场

若某个电场可找到这样的高斯面，面上的场强处处相同或分区域相同，则:

$$E\cos\theta\oint_S dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S面内} q_i$$

S是一个简单易求的曲面面积:

$$E=\frac{\frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S内} q_i}{\cos\theta\oint_S dS}=\frac{\frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S内} q_i}{\cos\theta\ S}$$

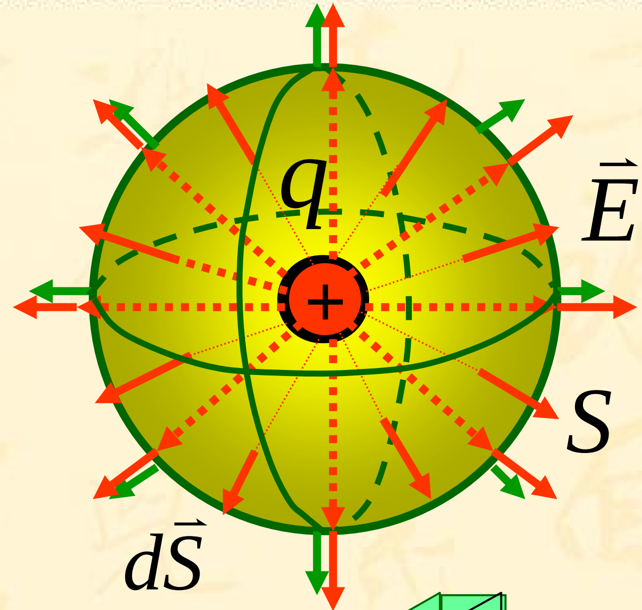
这样的高斯面通常应满足：

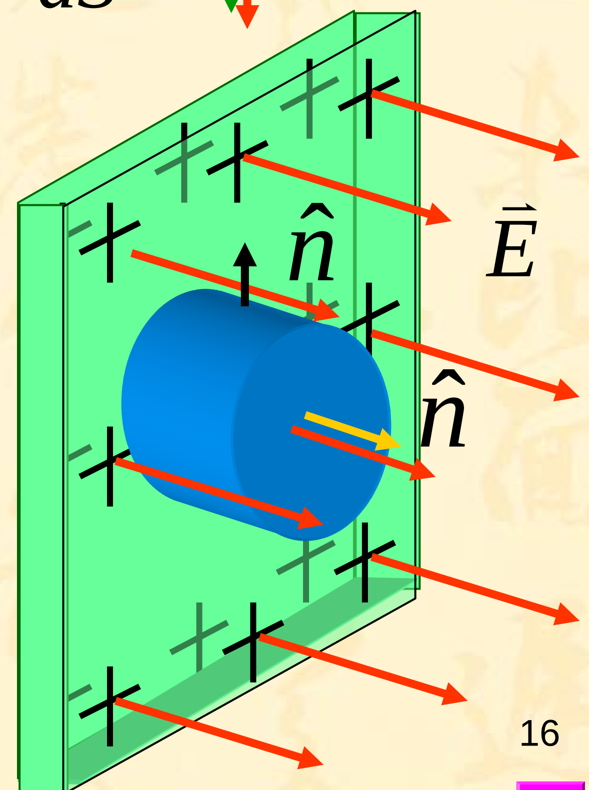
- 高斯面上的场强大小相等或分区域相等，其方向与面积正法线之间的夹角相同或分区域相同。（或场强与面法线垂直，其通量为零）

- 高斯面是简单而又便于计算的平面或曲面。

- 高斯面上的场强为所求。

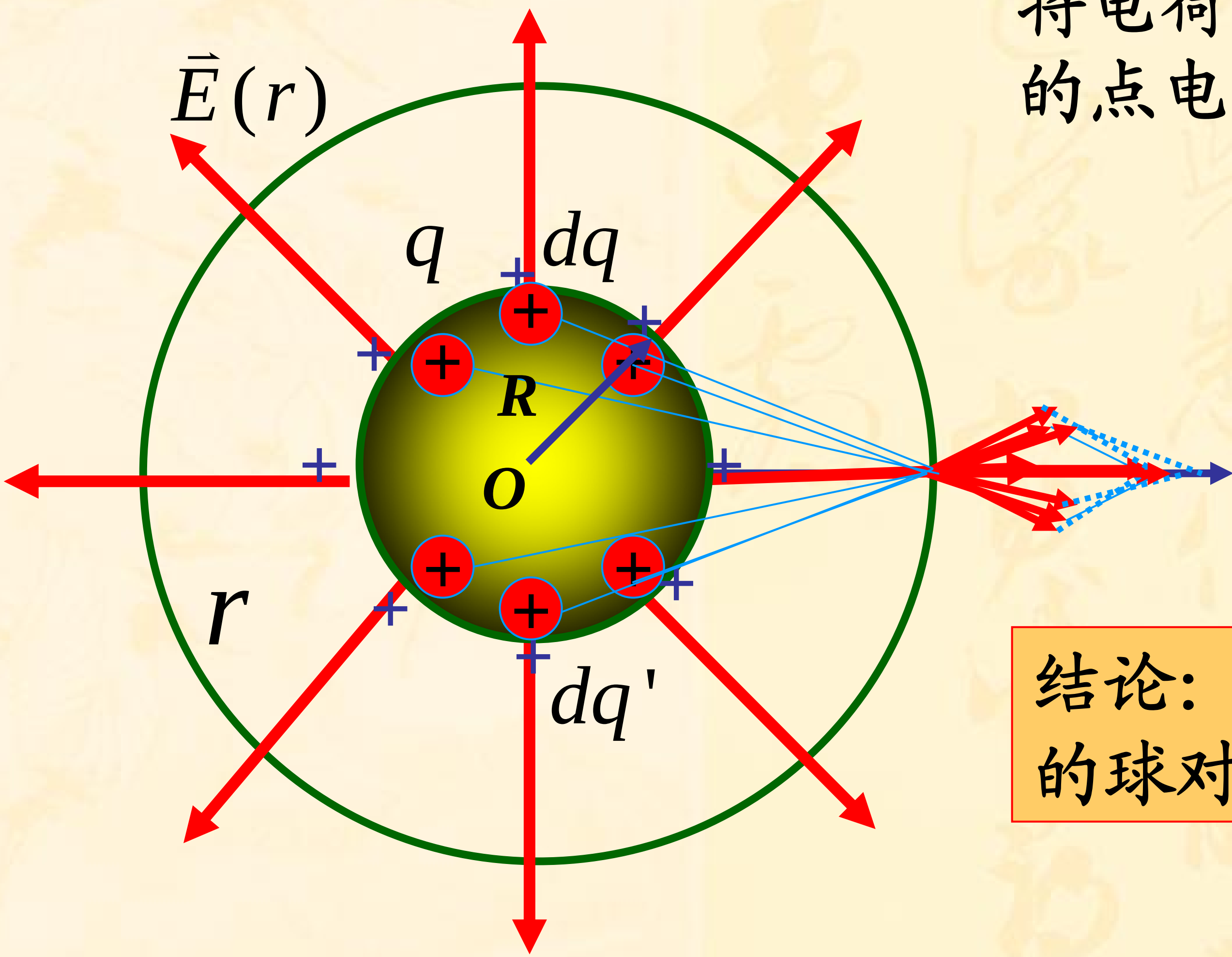
通常是具有某种对称性的电场--轴对称、球对称、均匀场等.





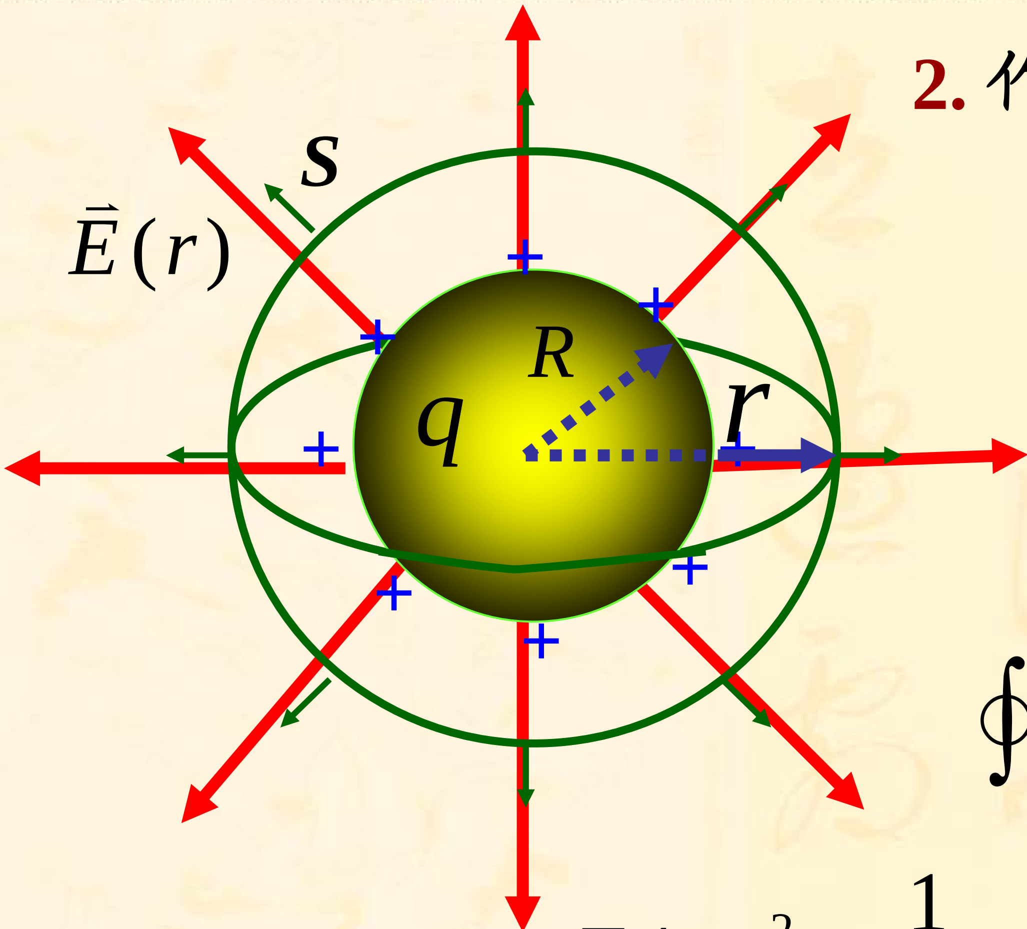
例1：求半径为R均匀带电q的球壳所产生的电场.

解：1. 分析对称性



将电荷看成许多成对的点电荷的集合。

结论：是以O为中心的球对称电场。



2. 作半径为**r** 的高斯球面

$(R \le r < \infty)$

依高斯定理:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S E \cos 0^\circ dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \qquad E \oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

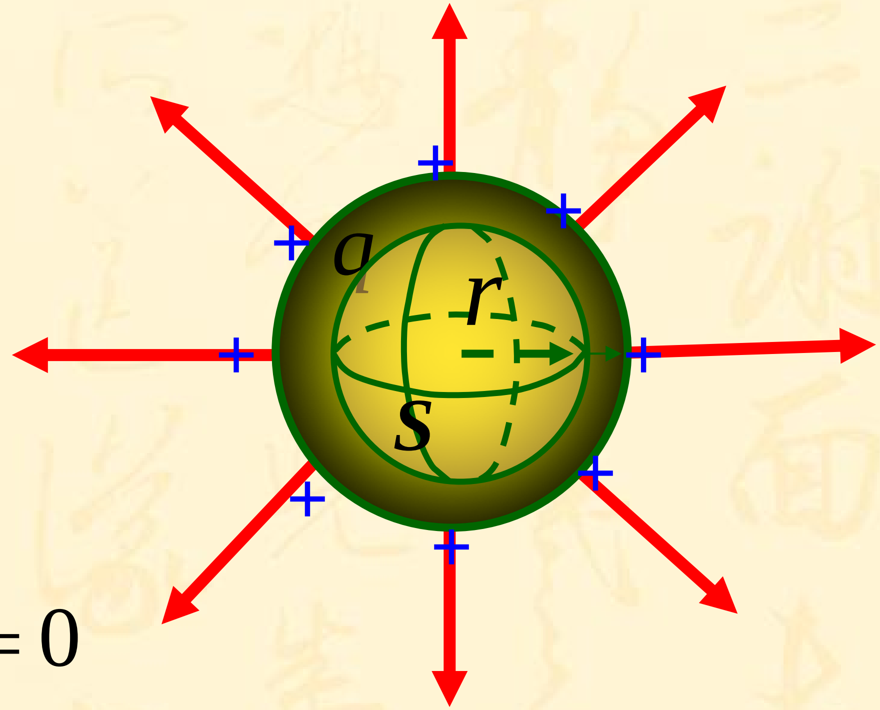
$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad 或 \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}$$

3. 作半径为r的高斯球面

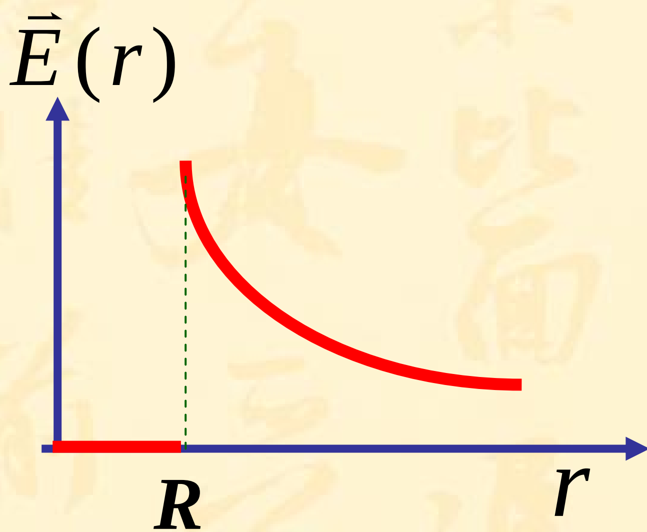
$$(0 \le r < R)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S E\cos\theta \, dS = 0 \quad \therefore E = 0$$



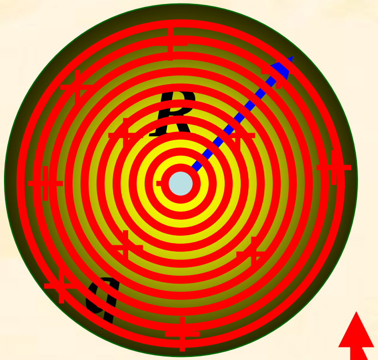
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \cdots (0 \le r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdots (R \le r < \infty) \end{cases}$$



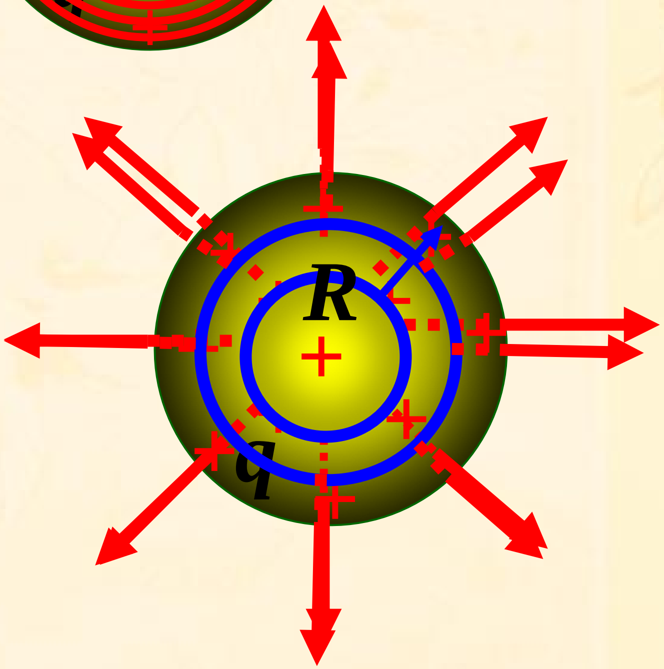
例2: 一半径为*R*、均匀带电*q*的球体，求其电场分布。

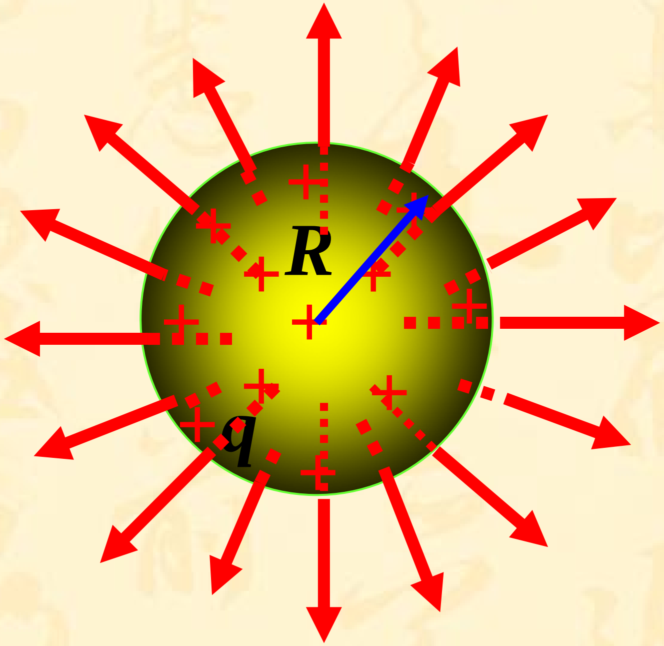
解: 1. 对称性分析:

将球体看成许多薄球壳组成。

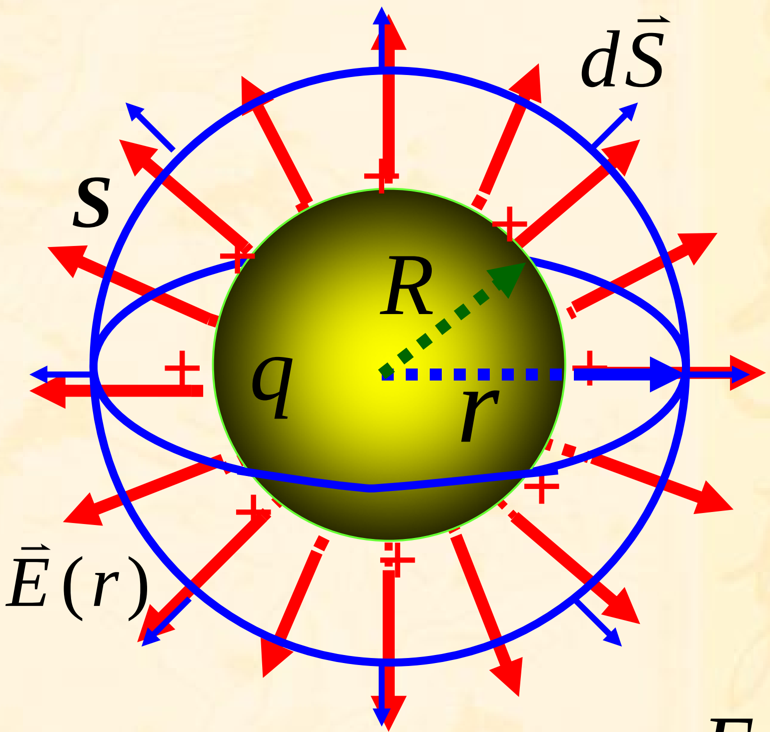


结论: 球内外都是球对称分布。





1. 作半径为r的球面 $(R \le r < \infty)$



由高斯定理:

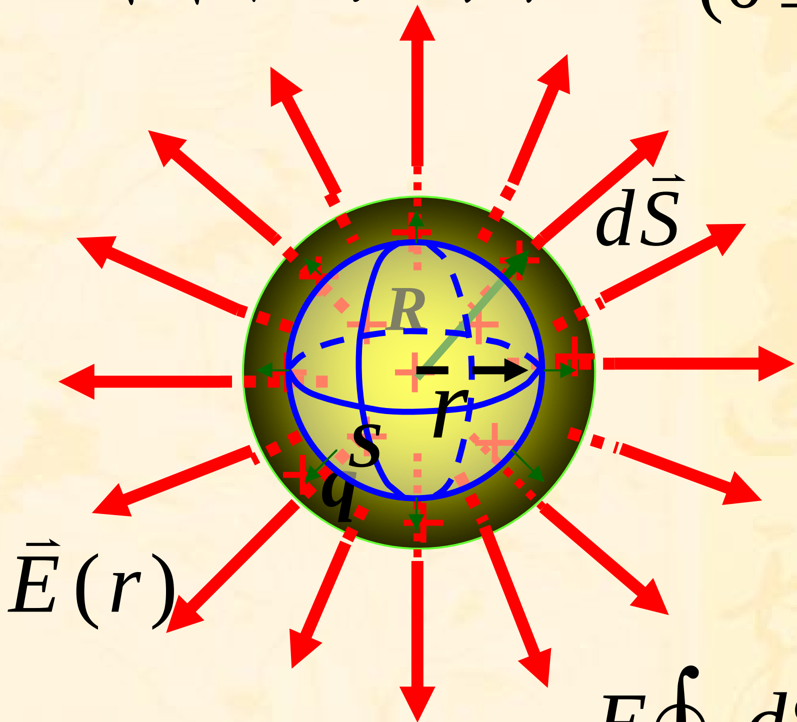
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S E\cos 0^\circ dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E\oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q \qquad E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad 或 \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}$$

2. 作半径为**r**的球面 $(0 \le r < R)$



由高斯定理:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

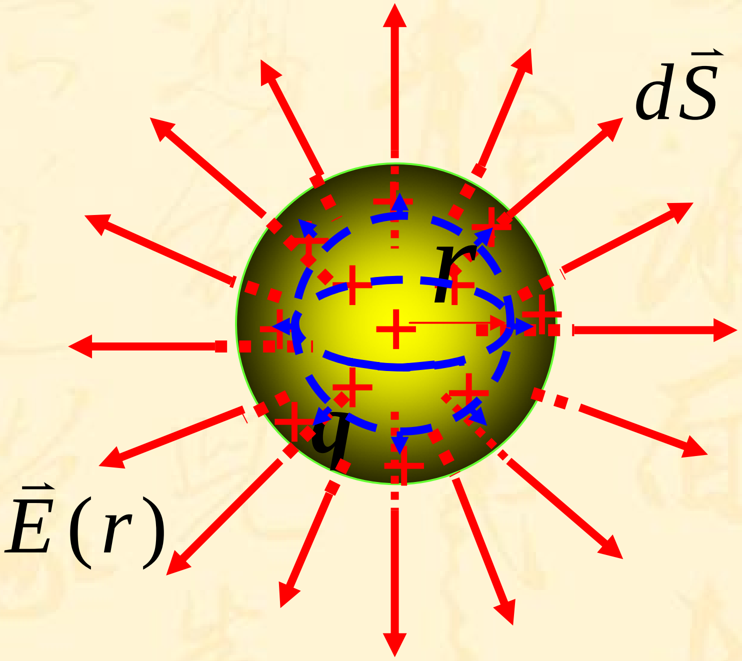
$$\oint_S E \cos 0^\circ dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E \oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot V_r = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

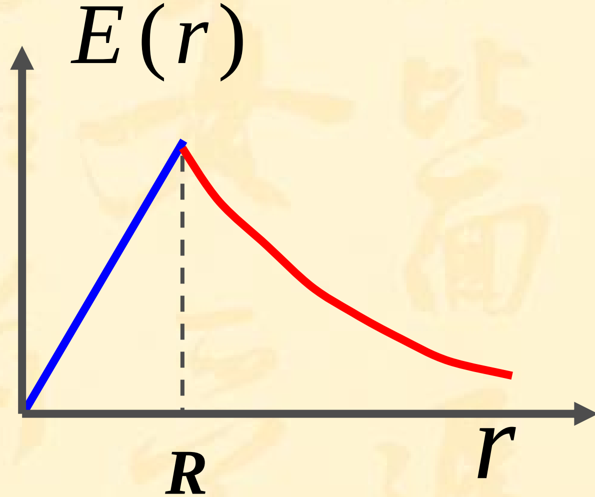
$$(0 \le r < R)$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$



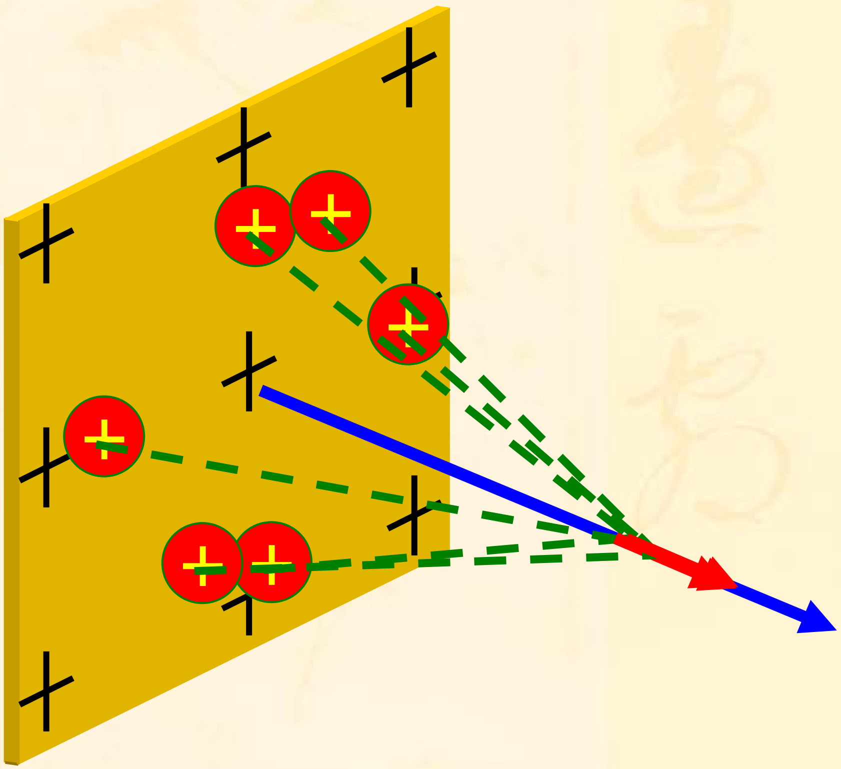
$$\boxed{\vec{E} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r}}$$

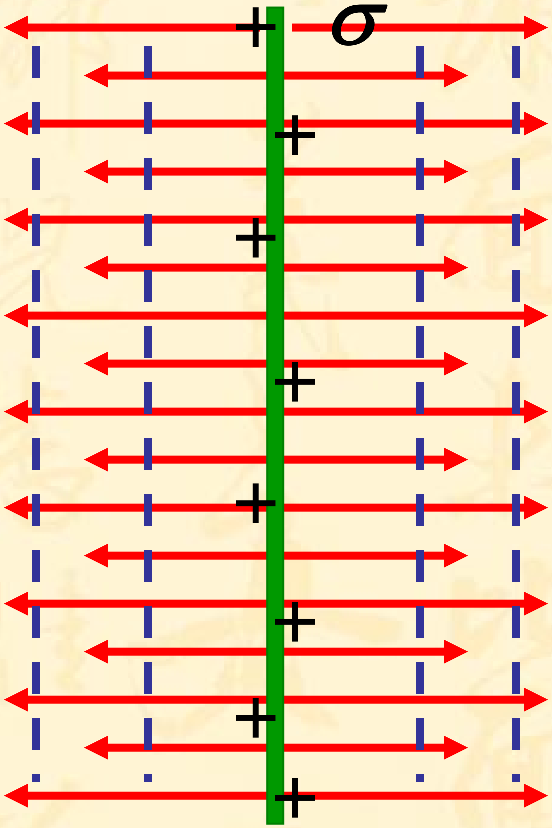
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdots(R < r < \infty) \\ \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r}\cdots(0 \le r < R) \end{cases}$$



例3：求无限大带电平面的电场。设电荷面密度为σ。

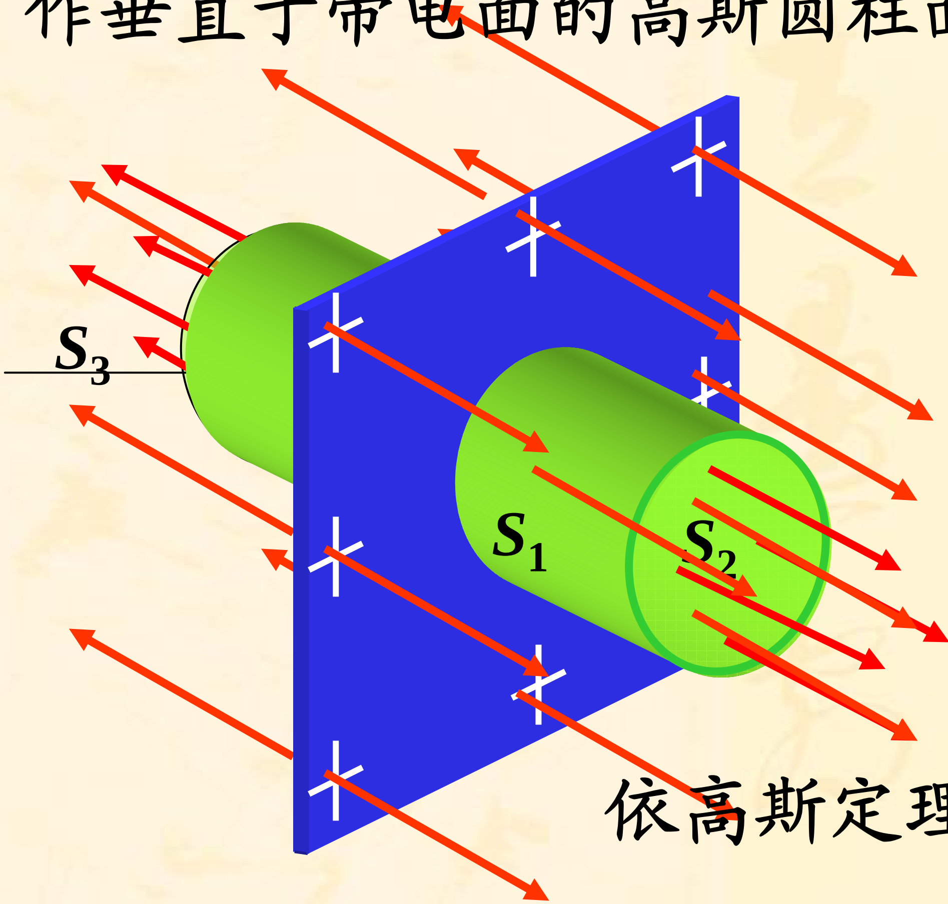
解：对称性分析：

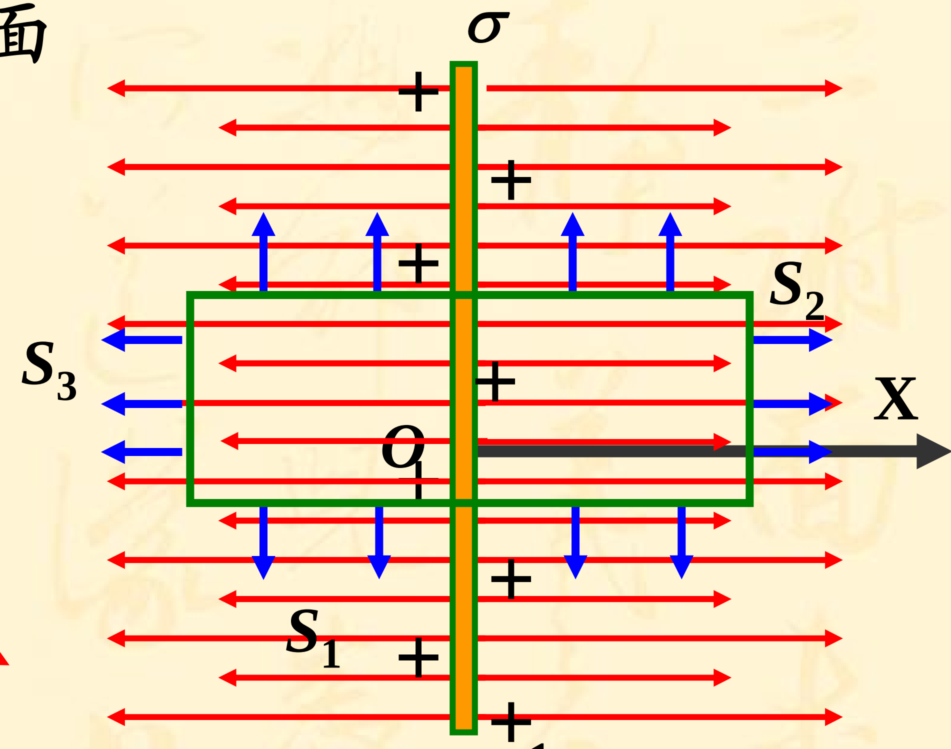




结论：是以面为对称的场。与带电面等距离的两平行平面处场强值相等。

作垂直于带电面的高斯圆柱面





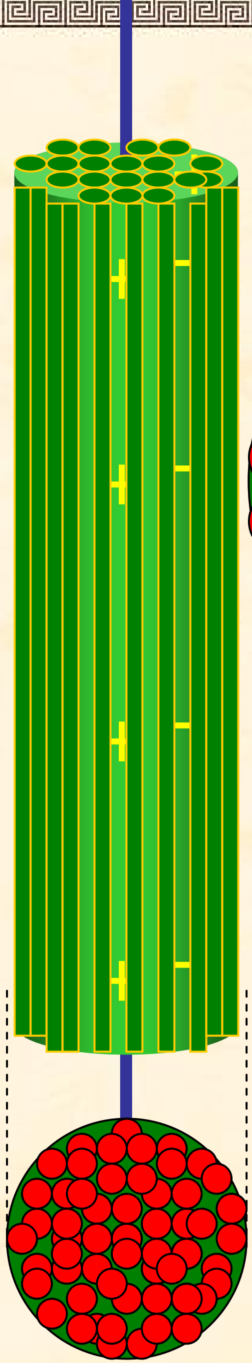
依高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S内} q_i$

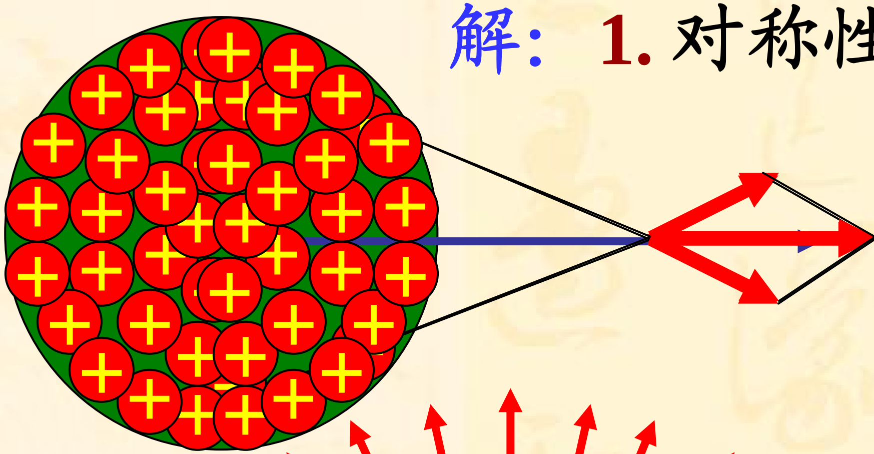
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E}_3\cdot d\vec{S}_3$$

$$= 0 + E_2S_2 + E_3S_3 = 2ES_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S_2$$

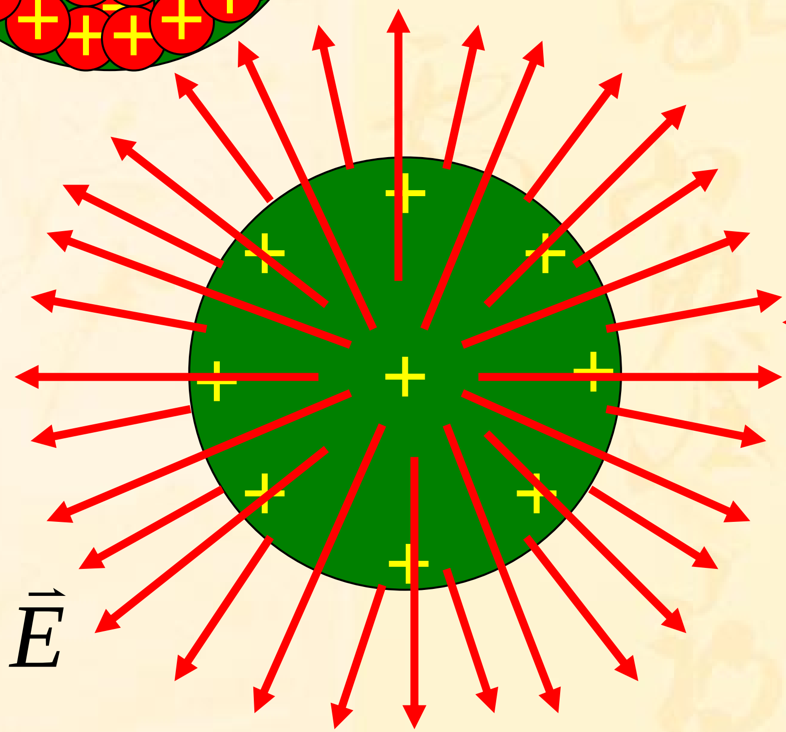
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{|x|}{x}\hat{i}}$$

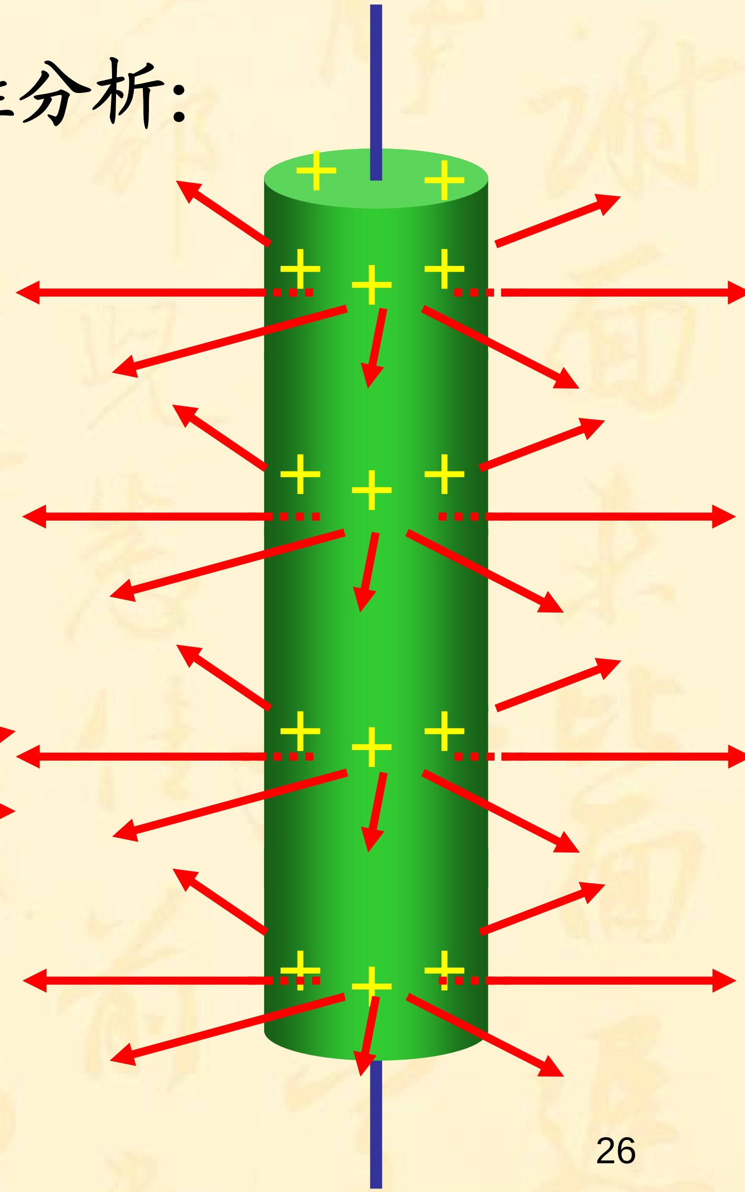
例4: 求一无限长，单位长度带电 λ 的直圆柱带电体的电场。



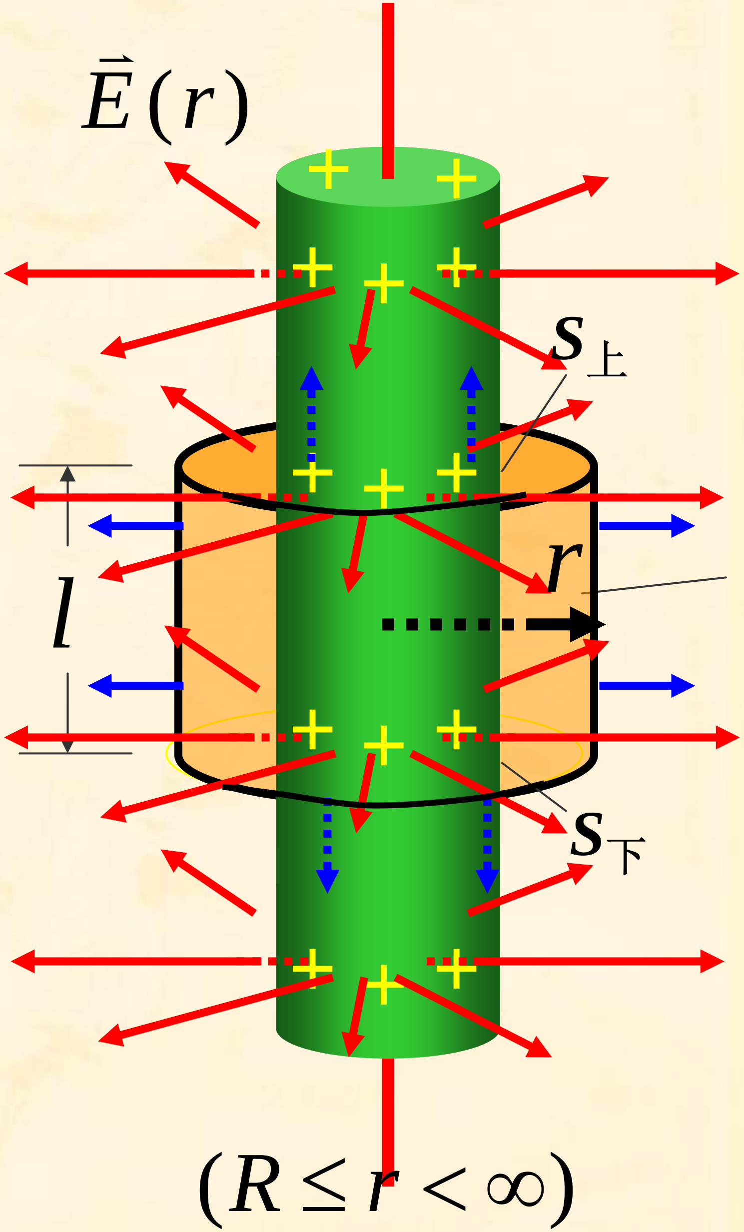


解: 1. 对称性分析:





2. 以轴线为中心，作半径为r的圆柱形高斯面S



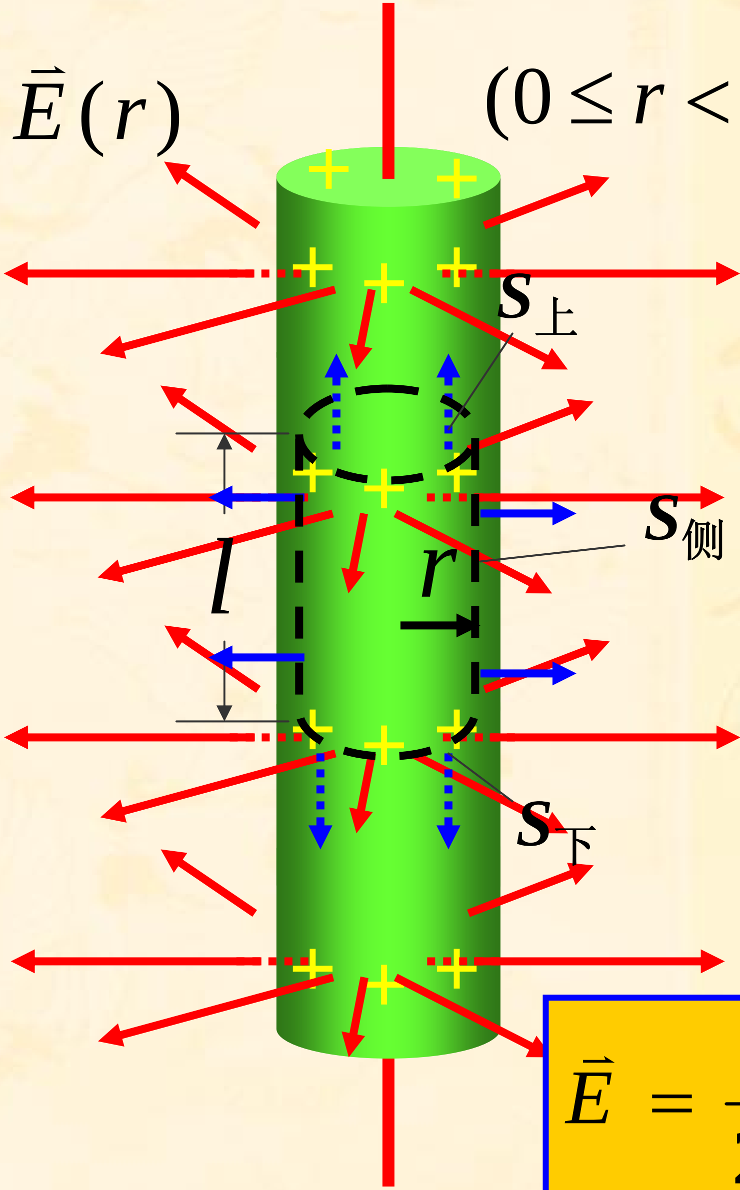
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_上} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_下} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E \times 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}}$$

3. 以轴线为中心，作半径为r的圆柱形高斯面S



$(0 \le r < R)$ $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_上} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_下} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E \times 2\pi r l$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \frac{\lambda}{\pi R^2}\pi r^2 l$$

$\frac{\lambda}{\pi R^2} \to \rho$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}}$$

综合:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}\cdots(0\le r<R)\\[2ex]\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\cdots(R\le r<\infty)\end{cases}$$