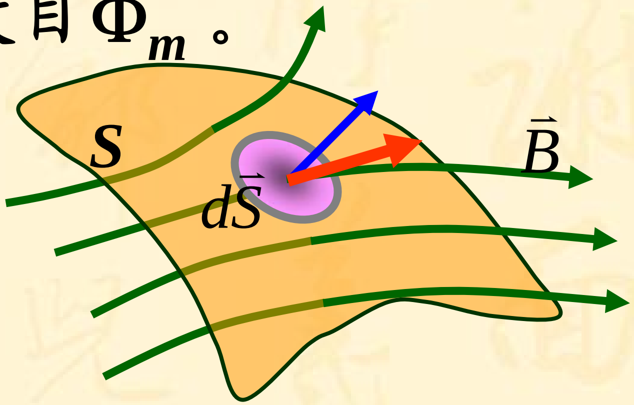
四、磁通量，磁场的高斯定理

磁通量---通过某一面积的磁力线数目Φ_m。

$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\cos\theta dS$$

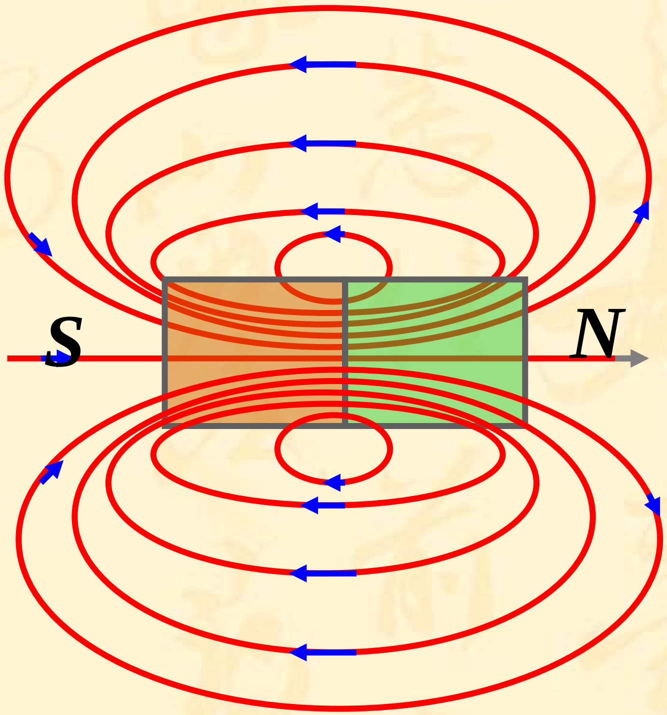
$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B\cos\theta dS$$



磁场的高斯定理

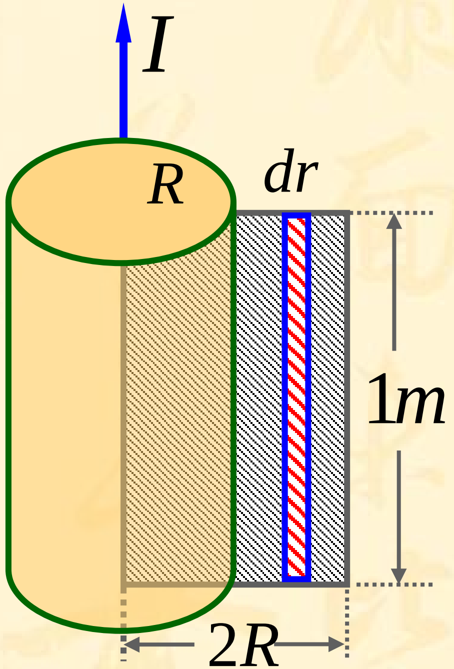
磁力线是闭合线，穿过任一闭合曲面的磁通量必定为零，即

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}$$



例：真空中无限长圆柱形铜导体（μ_0），半径**R**，电流 ***I*** 均匀分布，求通过阴影区**S**的磁通量。

解：面元 $ds=1\cdot dr$　$\vec{B}$ 与 $\overrightarrow{ds}$ 方向相同



导体内：$\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \int B_1 ds$

$$= \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

导体外：$\Phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \int B_2 ds$

$$= \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2 \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

§ 15-4 磁场强度、安培环路定理
(magnetic intensity 、Ampere’s Theorem of Circulation)

一、磁场强度 $\vec{H}$

磁感应强度 $\vec{B}$ 与介质的性质有关，引入辅助量—磁场强度 $\vec{H}$，可定义:

磁场强度 $$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}}$$

单位 **A/m**

在各向同性线性磁介质中，因 $\boldsymbol{B} \propto \mu$，所以 $\boldsymbol{H}$ 与介质的磁性无关。

由此可得:

无限长直载流导线的磁场强度为:

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}} \quad \left(B = \frac{\mu I}{2\pi r} \right)$$

长直载流螺线管内部:

$$\boxed{H = nI} \quad (B = \mu nI)$$

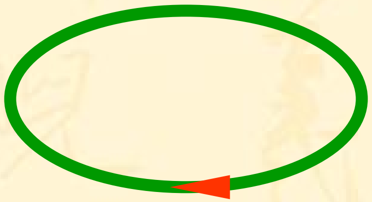
圆形电流轴线上和中心处

$$\boxed{H = \frac{R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad H = \frac{I}{2R}}$$

二、安培环路定理

静电场: $\oint_L \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ ，$\vec{E}$ 是保守场。

而磁感应线是闭合线，沿闭合线积分，则



$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} \neq 0$$

$\vec{B}$ 线是闭合线

现以无限长载流直导线的磁场为例，计算磁场强度沿闭合回路的积分:

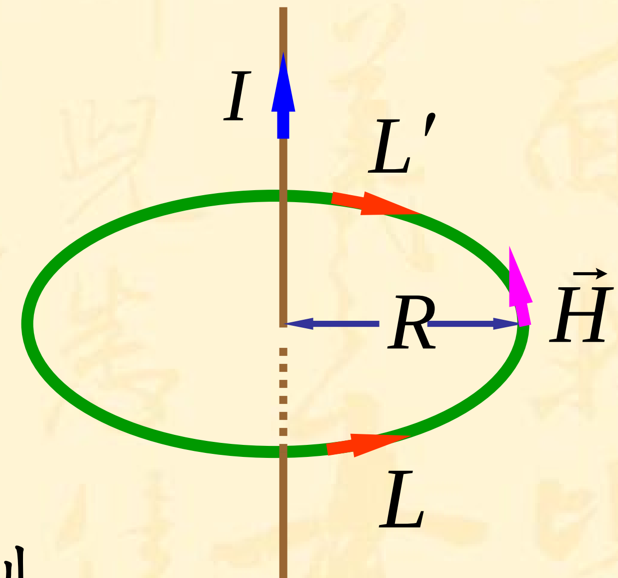
无限长载流直导线，$\vec{H}$ 线为同心圆: $H = \dfrac{I}{2\pi r}$

在垂直于导线平面取半径为R 的圆形回路L，且绕行方向与电流方向满足右手螺旋关系，则

$$\vec{H}\cdot d\vec{l}=Hdl$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\oint_L Hdl=H\oint_L dl$$

$$=H2\pi R=I$$



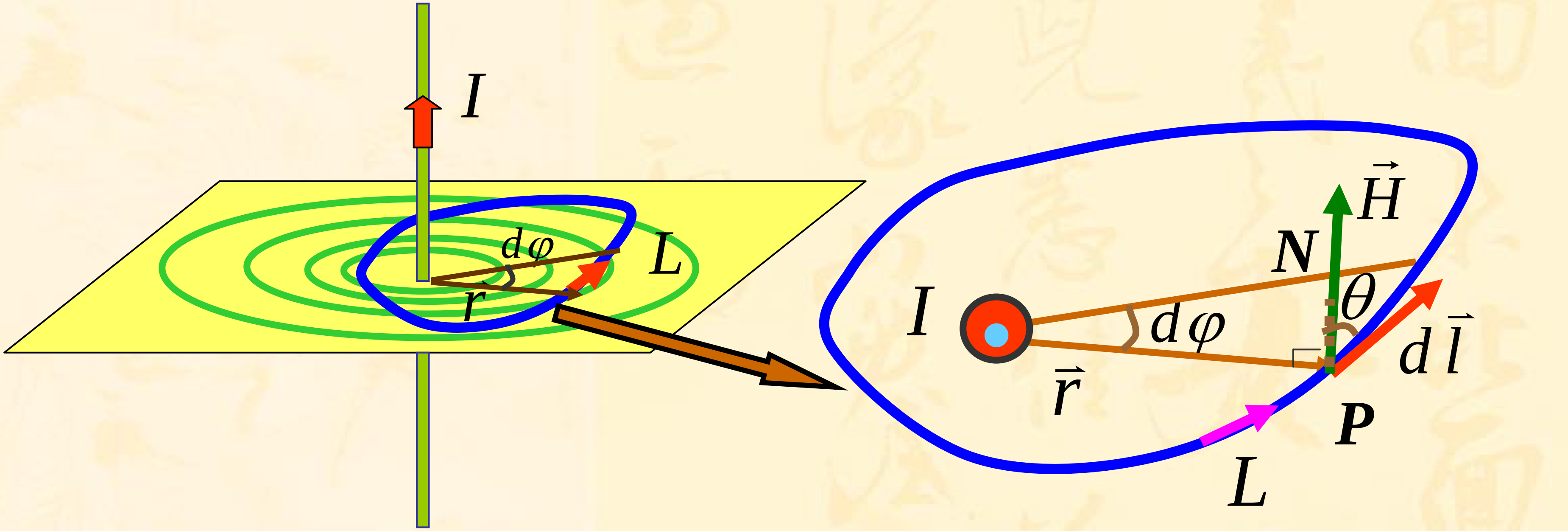
如果回路 L'与L绕向刚好相反，则

$$\oint_{L'} \vec{H}\cdot d\vec{l}=-\oint_{L'} Hdl=-I$$

现证明任意形状的闭合回路

1. 电流在回路之内

A. 设环路L与I成右手螺旋关系



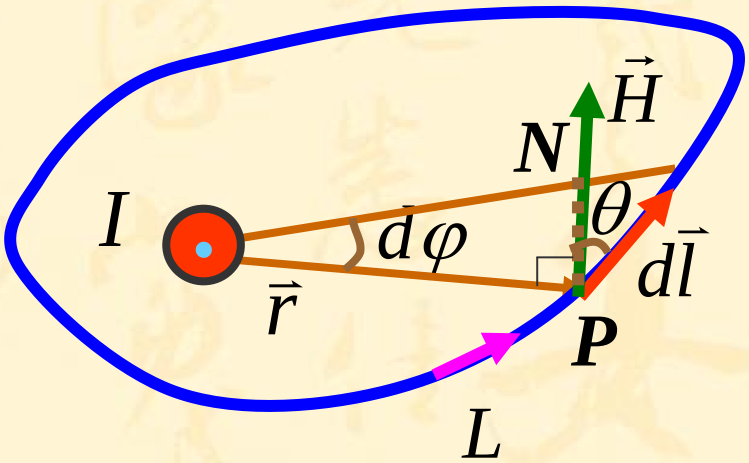
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_L H\cos\theta dl$$

$$\vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cos\theta dl = H\,\overline{PN} = Hrd\varphi$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_L Hrd\,\varphi$$

$$= \int \frac{I}{2\pi r} rd\varphi$$

$$= \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = I$$



B. 设环路L 的绕行方向与前述相反

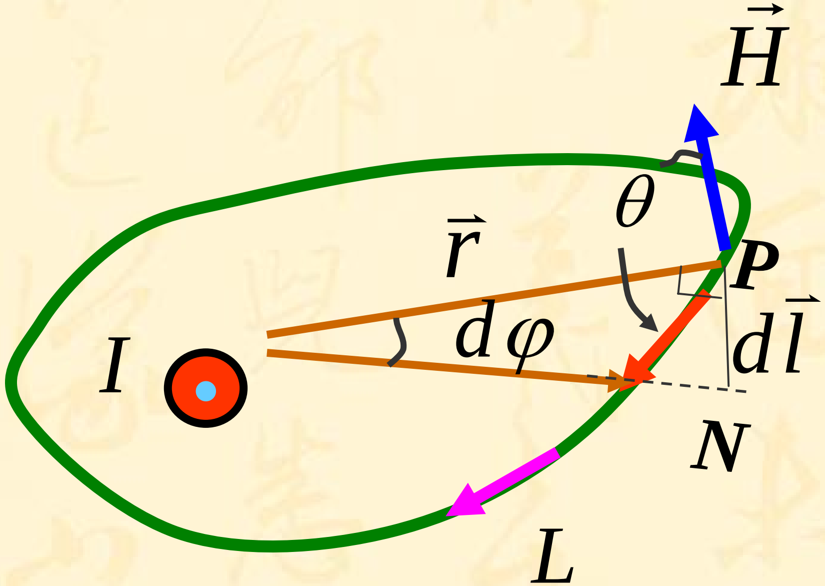
$$\vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cos\theta dl$$

$$= -H\,\overline{PN} = -Hr\,d\varphi$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_L -Hrd\varphi$$

$$= -\int \frac{I}{2\pi r} r d\varphi$$

$$= -\frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = -I$$

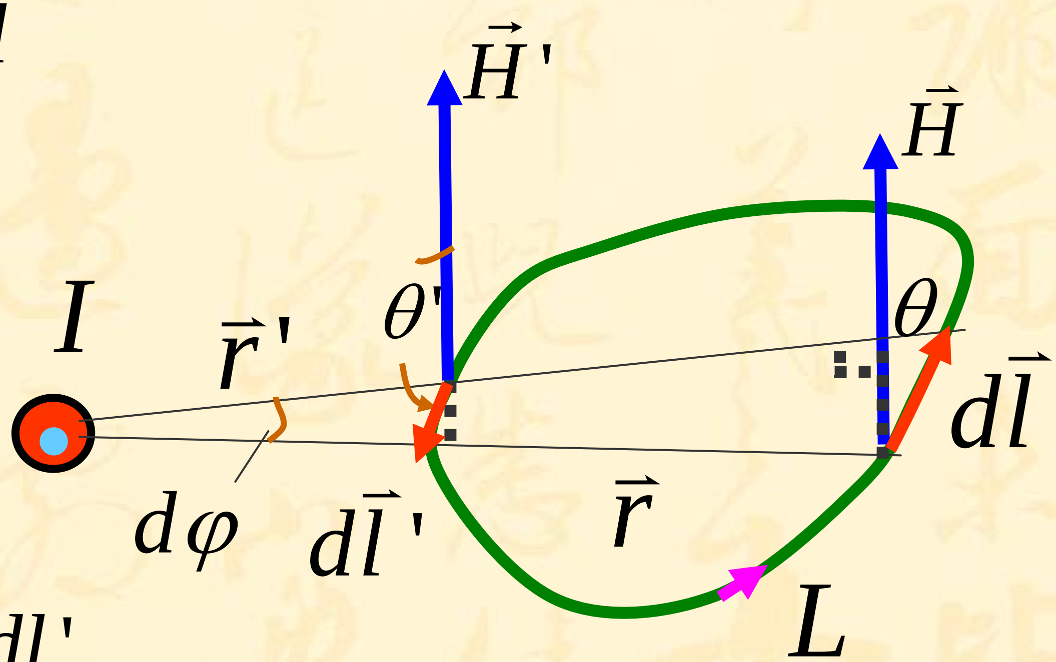


2. 电流在环路之外

$$\vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cos\theta dl$$

$$= \frac{I}{2\pi r} r d\varphi$$

$$= \frac{I}{2\pi} d\varphi$$



$$\vec{H}'\cdot d\vec{l}' = H'\cos\theta' dl'$$

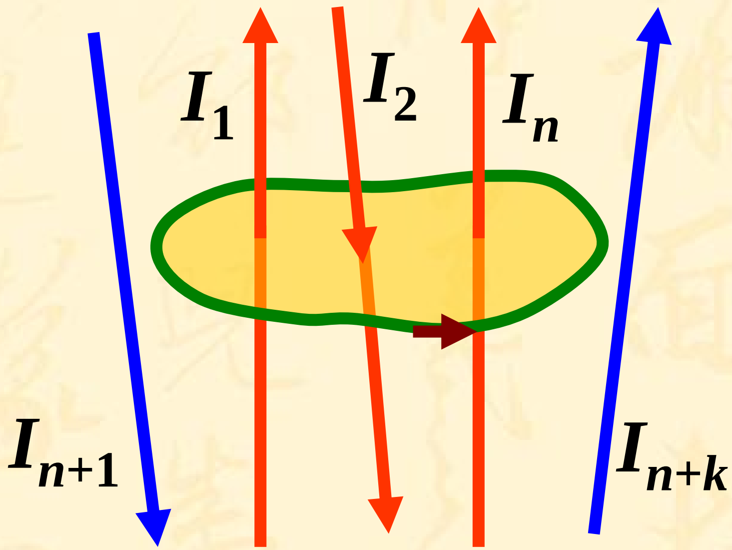
$$= \frac{I}{2\pi r'}(-r' d\varphi) = -\frac{I}{2\pi} d\varphi$$

$$\therefore \oint_L \vec{H}\cdot d\cdot\vec{l} = 0$$

3. 存在若干条线电流的情况

环路内 $I_1, I_2, \cdots I_n,$

环路外 $I_{n+1}, \cdots I_{n+k}$



$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} \vec{H}_i$$

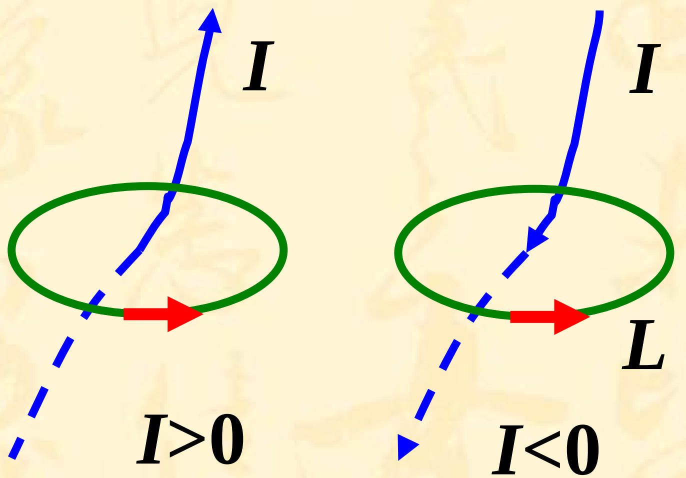
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i \cdot d\vec{l} + \oint_L \sum_{i=n+1}^{n+k} \vec{H}_i \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I_i + 0 = \sum_{(L内)} I_i$$

安培环路定理:

磁场强度 $\vec{H}$ 沿任意闭合回路的线积分，等于穿过这一回路的所有电流的代数和。

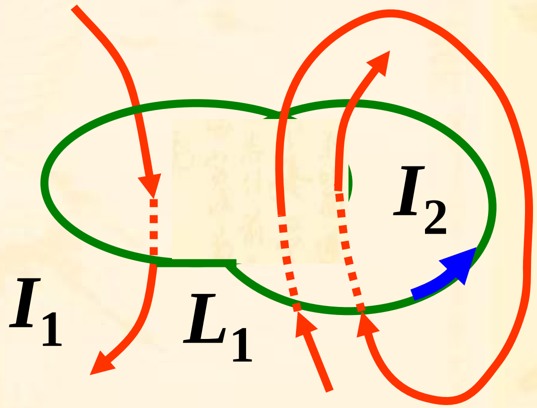
$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)} I_i}$$

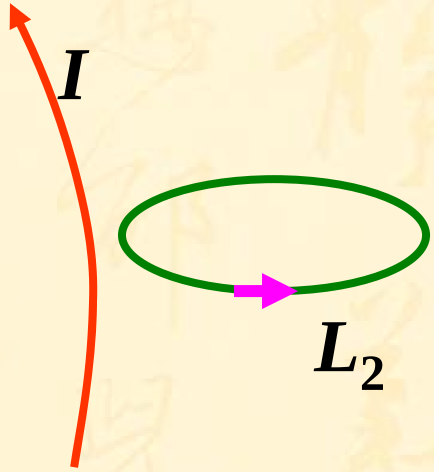


I_i 的正负的规定:

穿过回路的电流 I_i 方向与回路绕行方向服从右手螺旋关系时，$I_i > 0$，否则 $I_i < 0$。

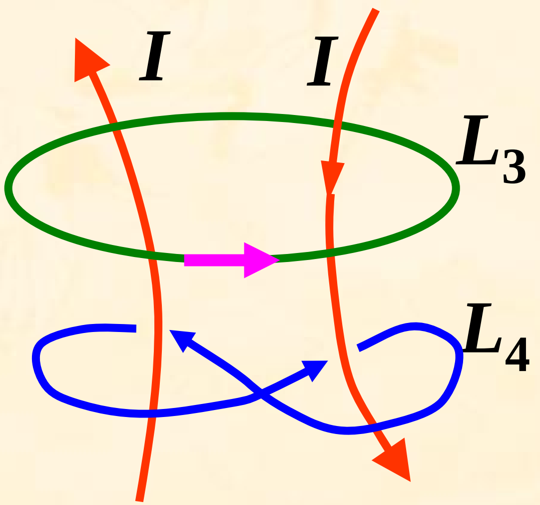
例:





$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\,\vec{l} = (2I_2 - I_1)$$

$$\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\,\vec{l} = 0$$



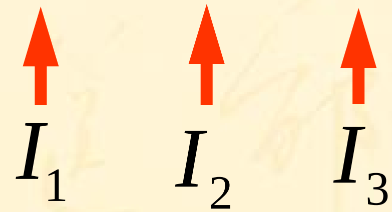
$$\oint_{L_3} \vec{H} \cdot d\,\vec{l} = (I - I) = 0$$

$$\oint_{L_4} \vec{H} \cdot d\,\vec{l} = (I + I) = 2I$$

磁感应强度的环流

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu \sum_{(L内)} I_i}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

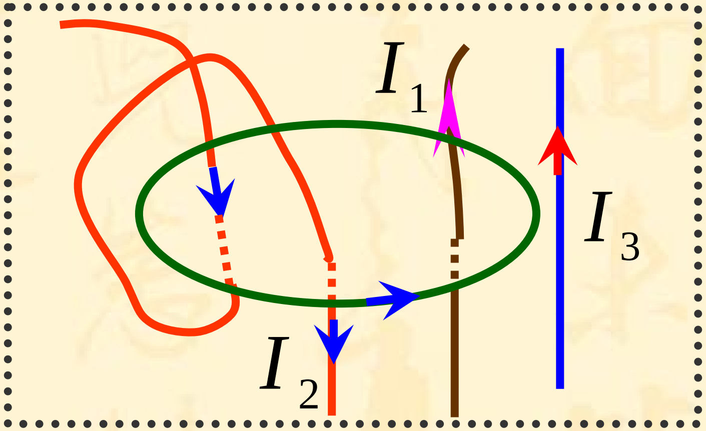


$$B_3 \neq 0$$

回路积分: $\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$

$$\oint_L \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0(-2I_2)$$

$$\oint_L \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = 0$$



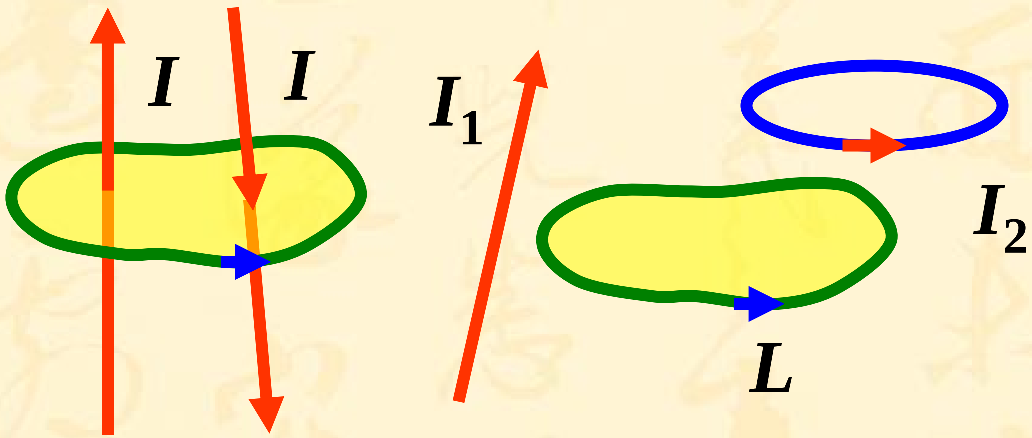
讨论

1.回路外的电流对**B**沿整个回路的积分为零，但对回路上各点的**B**有贡献。

2. 若在环路上 B 处处为零，则环流一定为零，

但 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ 时，L上的 $\vec{B}$ 不一定为零:

a） $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$



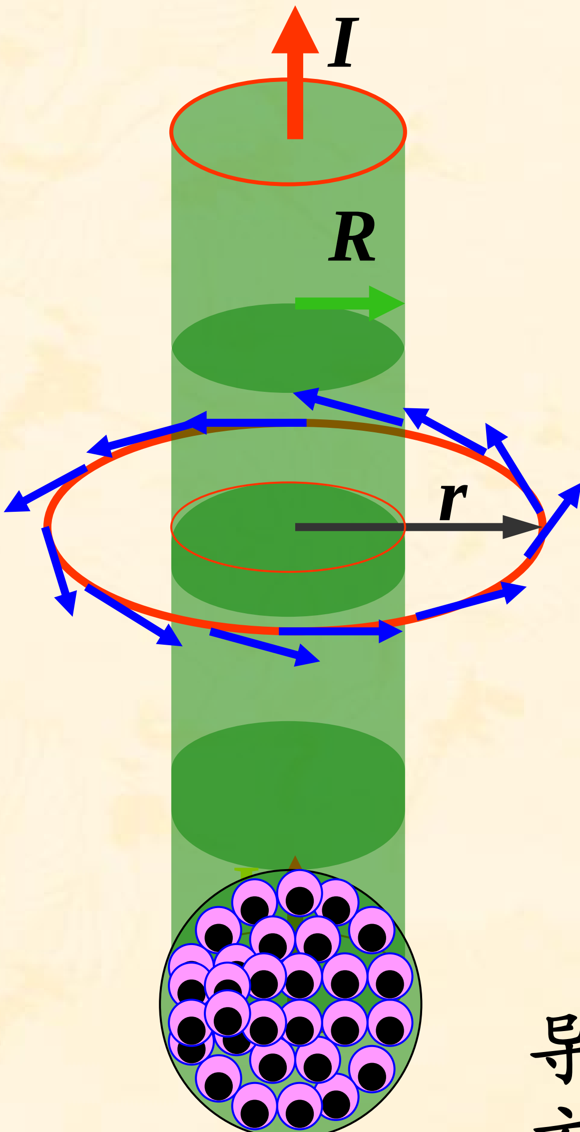
b） 电流在环路外

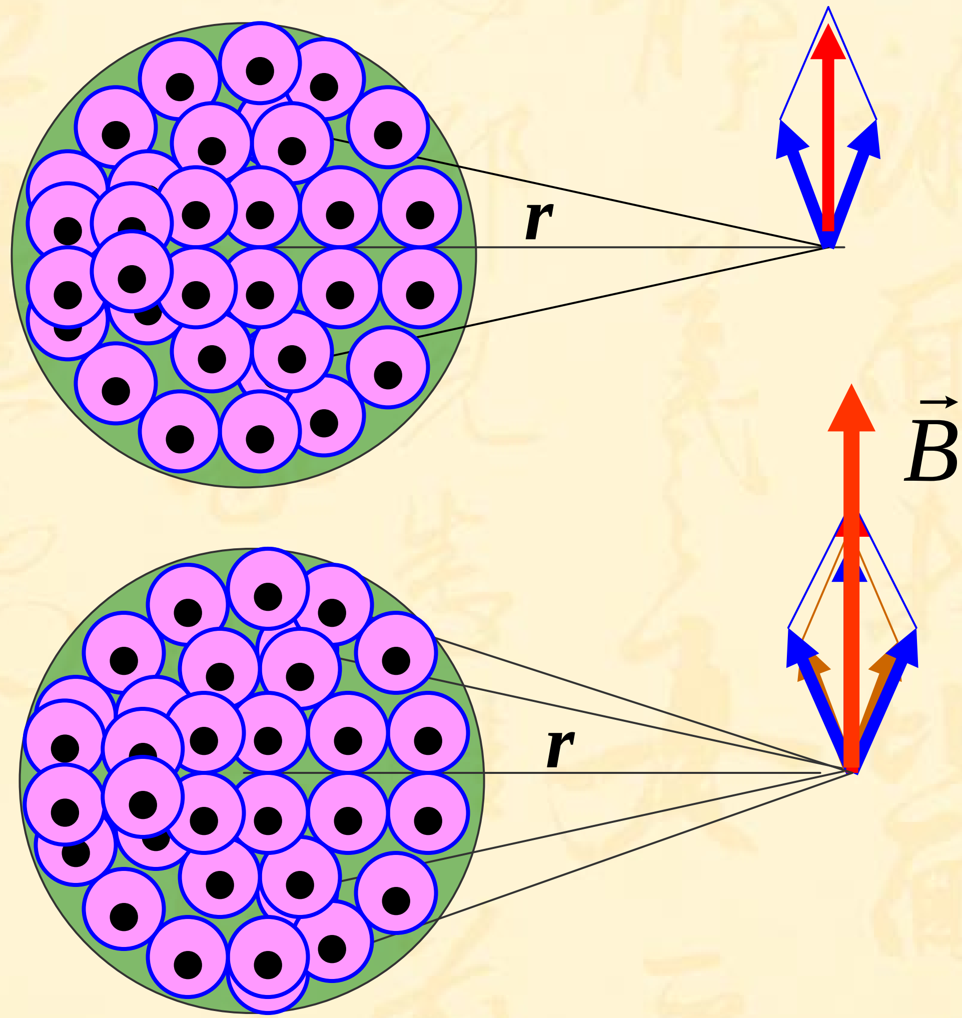
3. 安培环路定理是说明磁场基本性质的方程

● 磁场是有旋场。

三、安培环路定理的应用

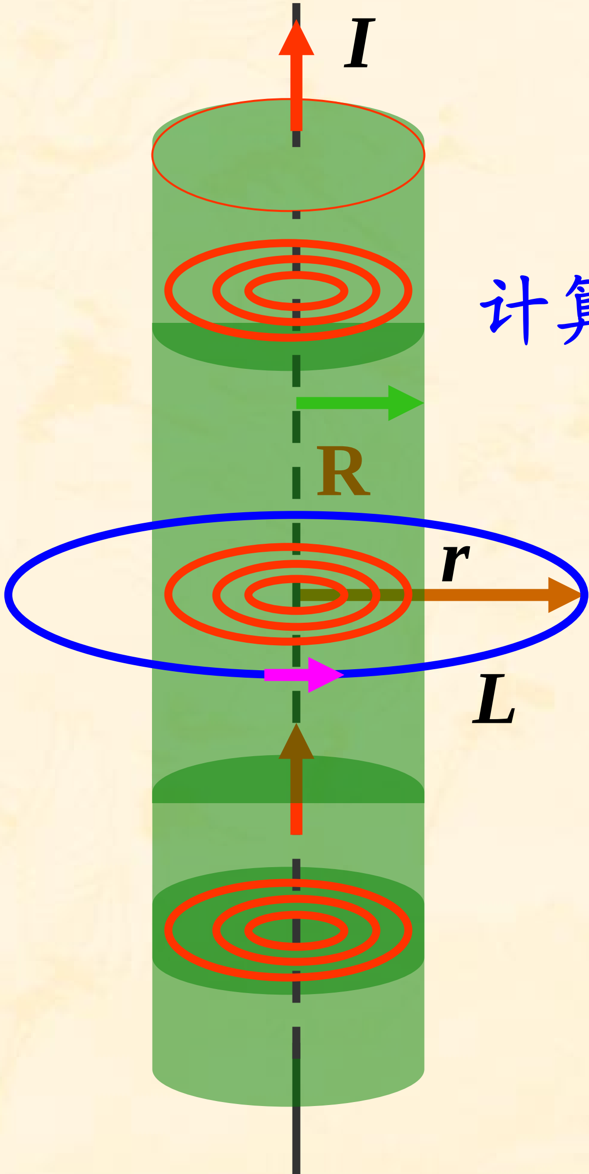
1. 无限长直载流圆柱体的磁场　分析:

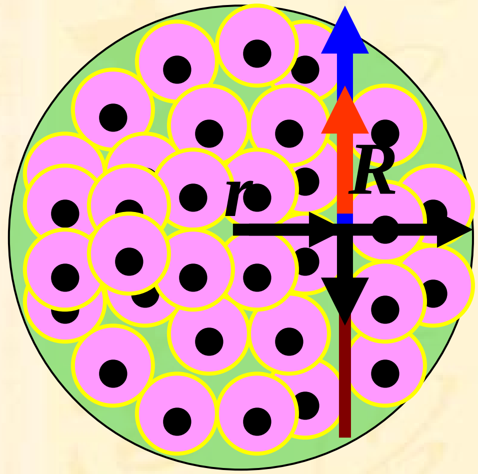




导线外磁场以轴为中心，沿圆周切线方向。

在载流圆柱体内:





也是以中心轴线为对称的分布。

计算:

1）圆柱体外 $(R \leq r < \infty)$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H dl = \sum_{L内} I_i = I$$

$$H 2\pi r = I$$

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}}$$

2. 圆柱体内: $(0 \le r < R)$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H dl = \sum_{L内} I_i$$

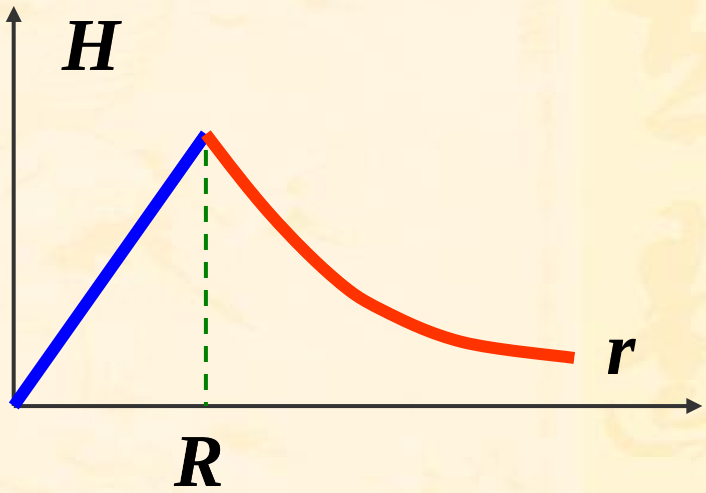
$$H 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

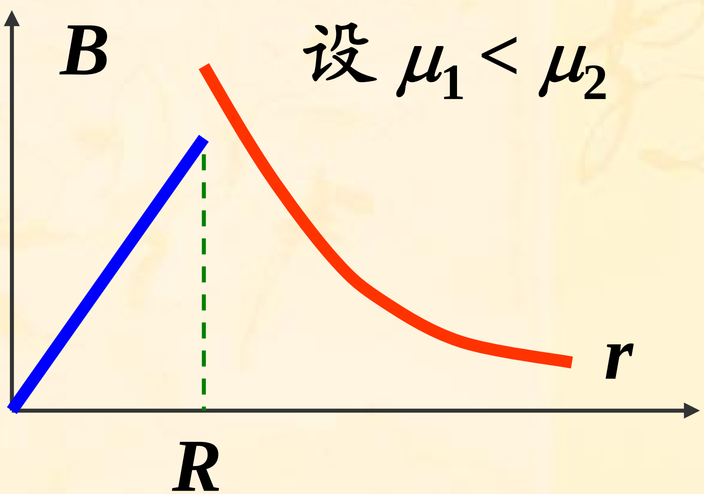
$$\boxed{H = \frac{Ir}{2\pi R^2}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_1 Ir}{2\pi R^2}}$$

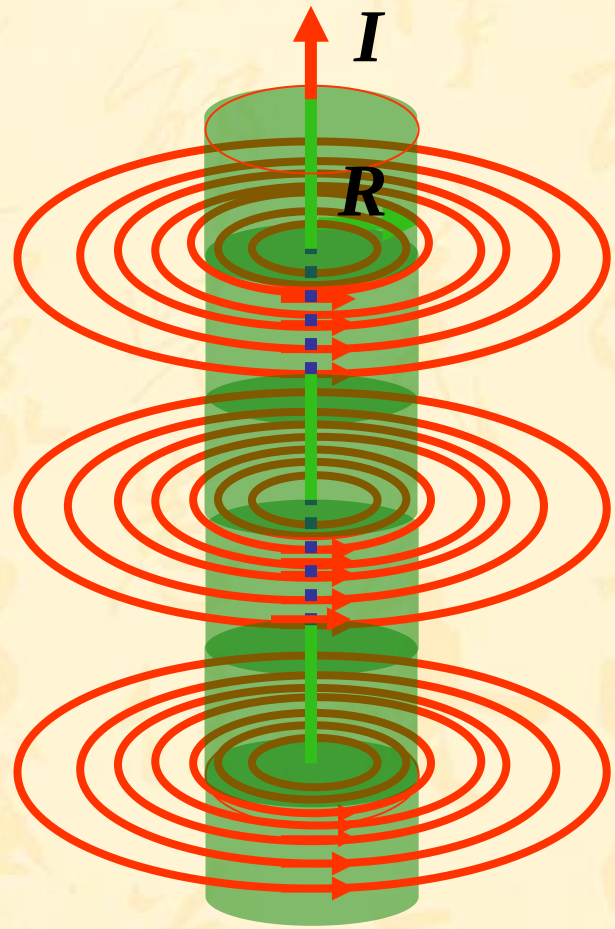
$$H=\begin{cases}\dfrac{Ir}{2\pi R^{2}}\cdots(0\le r<R)\\ \dfrac{I}{2\pi r}\cdots(R\le r<\infty)\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_{1}Ir}{2\pi R^{2}}\cdots(0\le r<R)\\ \dfrac{\mu_{2}I}{2\pi r}\cdots(R\le r<\infty)\end{cases}$$



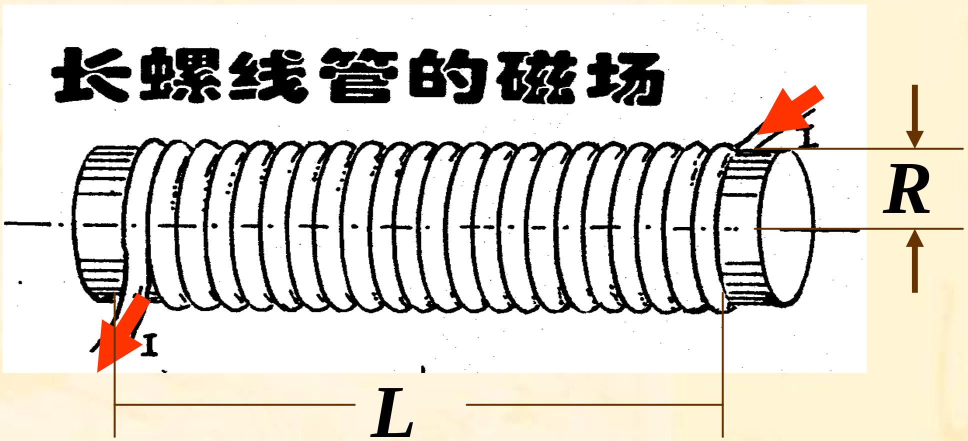


设 $\mu_1 < \mu_2$



***H*线是连续的，但*B*线却不一定。**

2. 载流“无限长” 直螺线管内外的磁场分布

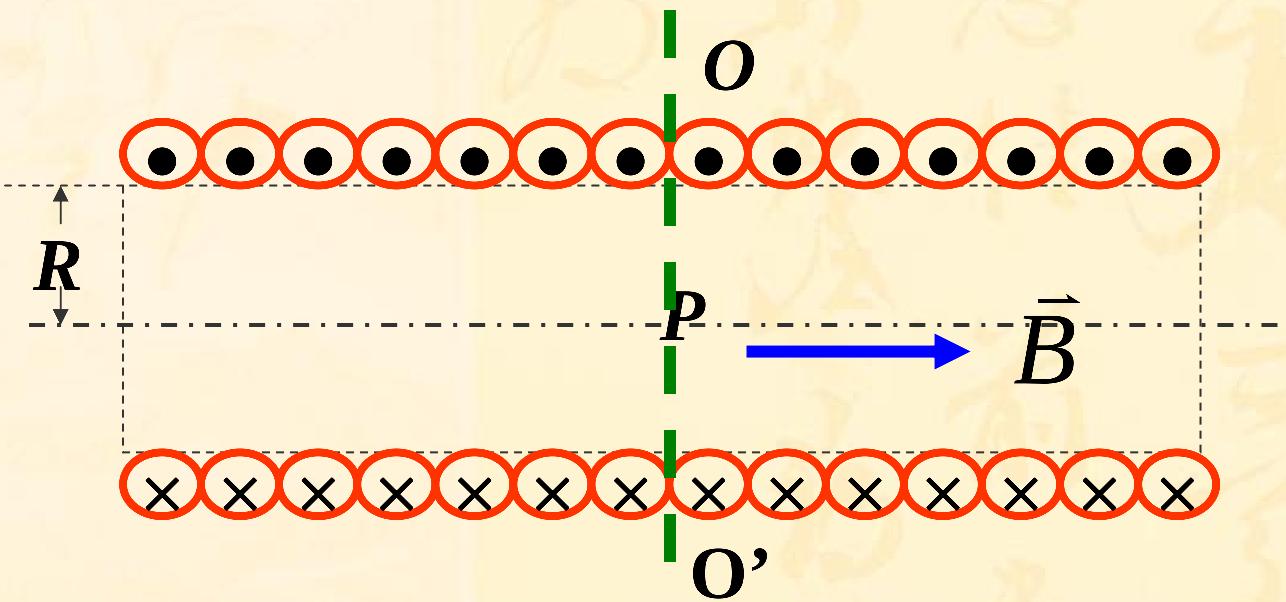


（通常$L>20R$）

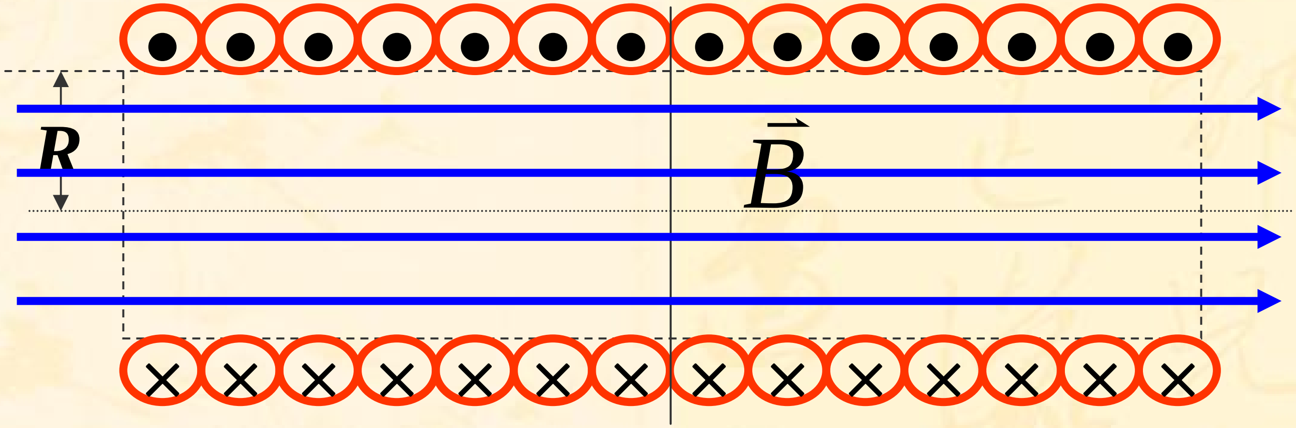
设单位长度匝数n

解： 分析磁场分布

1. 由对称性可知，管内磁场沿轴线方向：

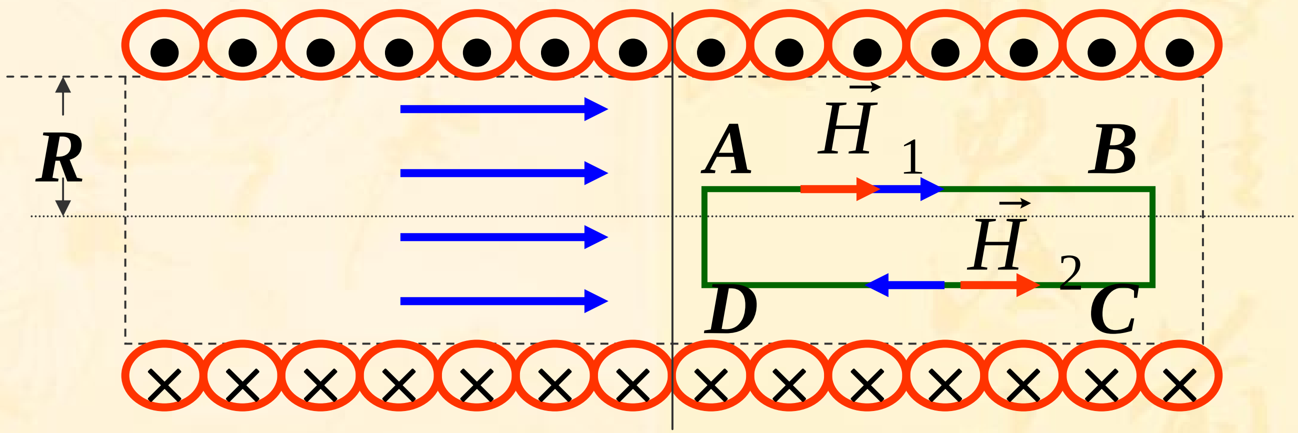


磁场磁力线:



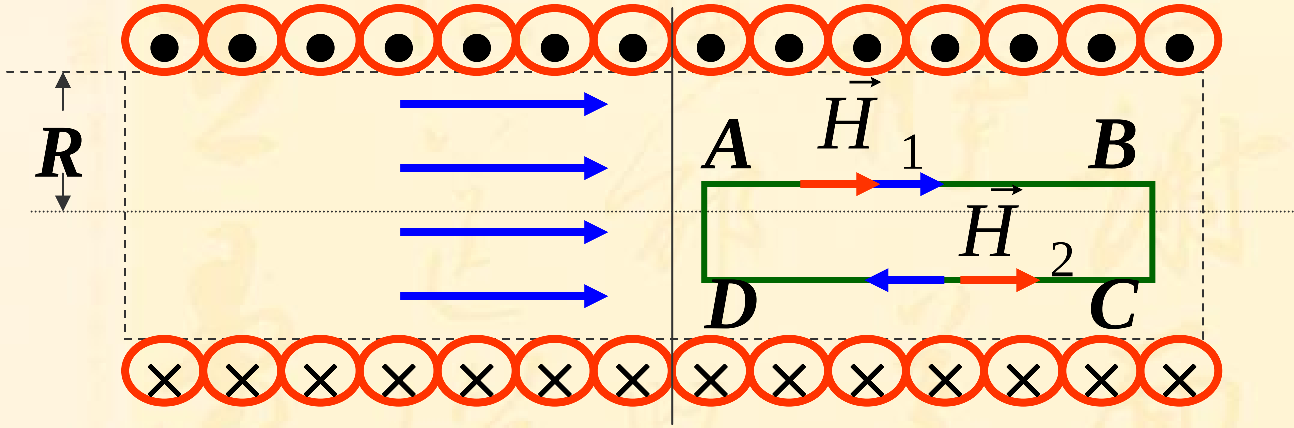
为什么磁力线画成均匀的?

证明:



作安培环路*L*（*ABCDA*）

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_i = 0$$



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{AB}\vec{H}_1\cdot d\vec{l} + \int_{BC}\vec{H}\cdot d\vec{l}$$

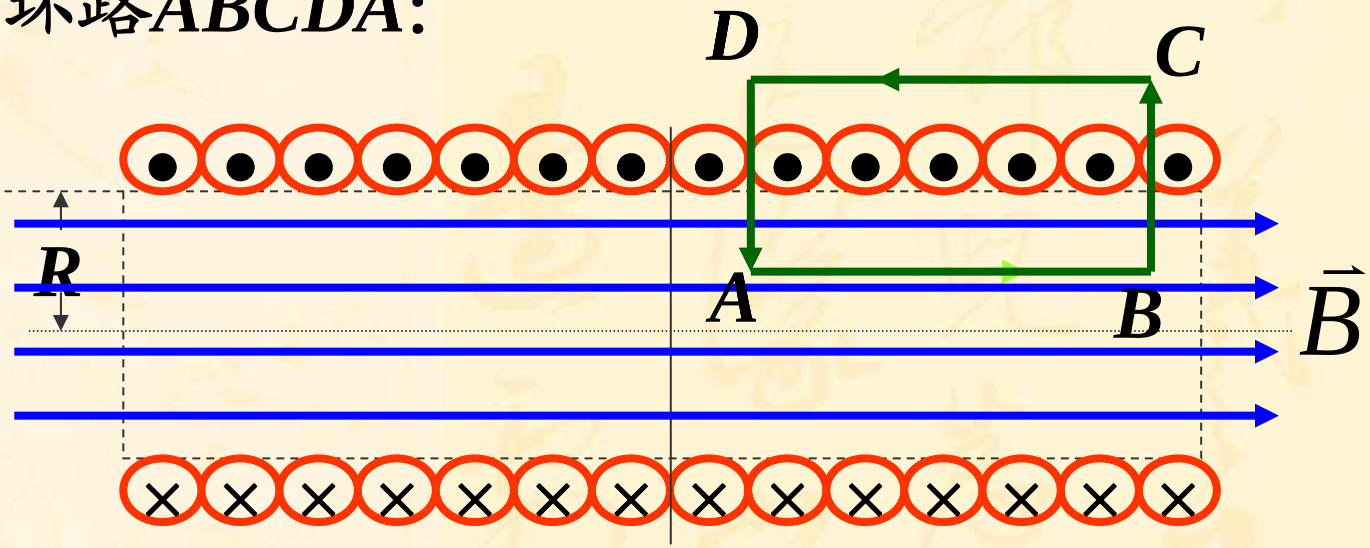
$$+\int_{CD}\vec{H}_2\cdot d\vec{l} + \int_{DA}\vec{H}\cdot d\vec{l}$$

$$= H_1 l_{AB} + 0 - H_2 l_{CD} + 0 = 0$$

$\therefore H_1 = H_2$ 即管内是均匀磁场。

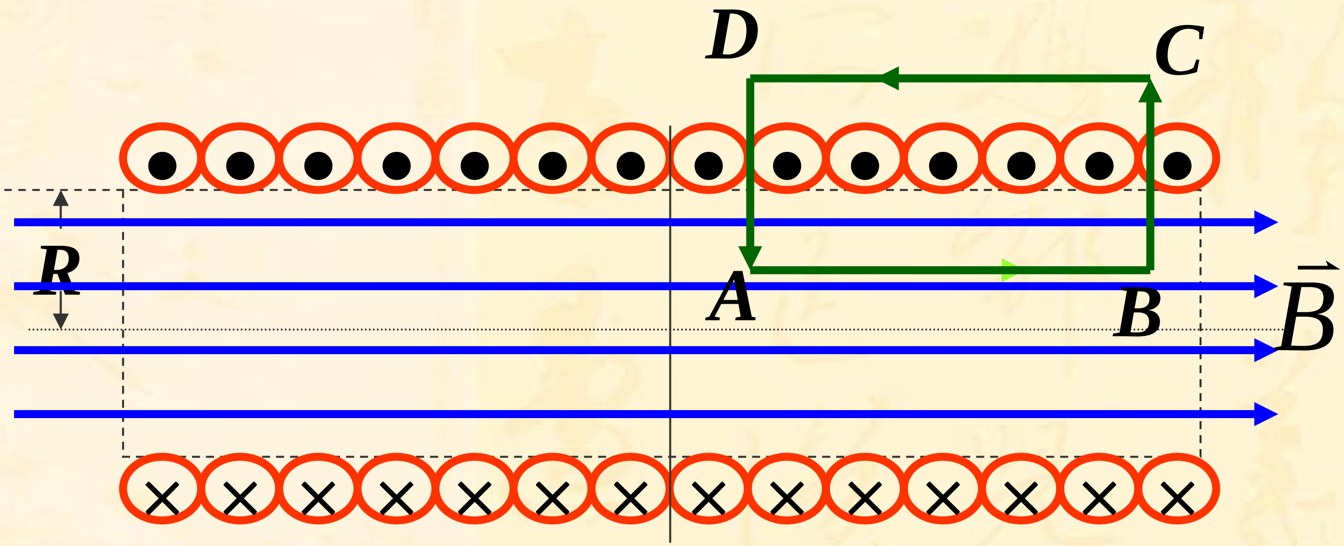
由对称性可推知管外磁场为零。

作安培环路*ABCDA*:



$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{H}_{内} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$+ \int_{CD} \vec{H}_{外} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$



$$= H_{内} l_{AB} + 0 + 0 + 0$$

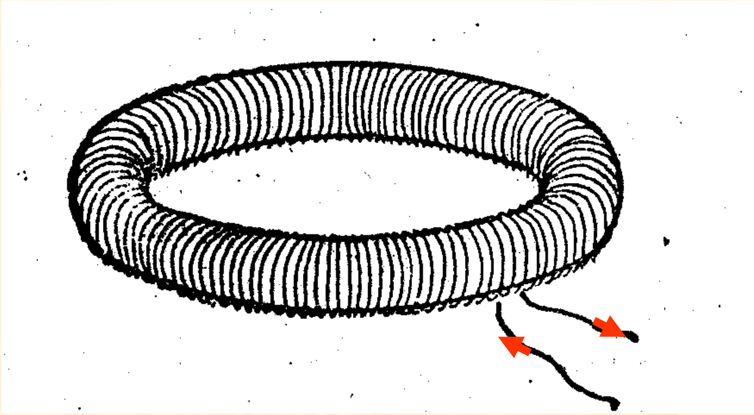
$$= \sum_{L内} I_i = n l_{AB} I$$

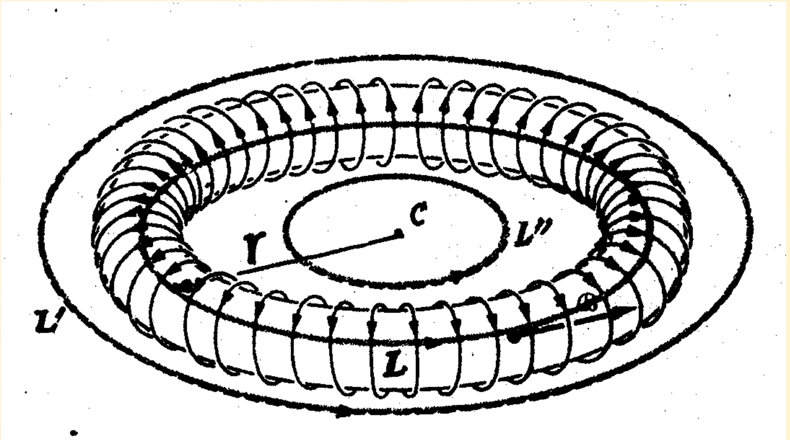
$$\boxed{H_{内} = nI}$$

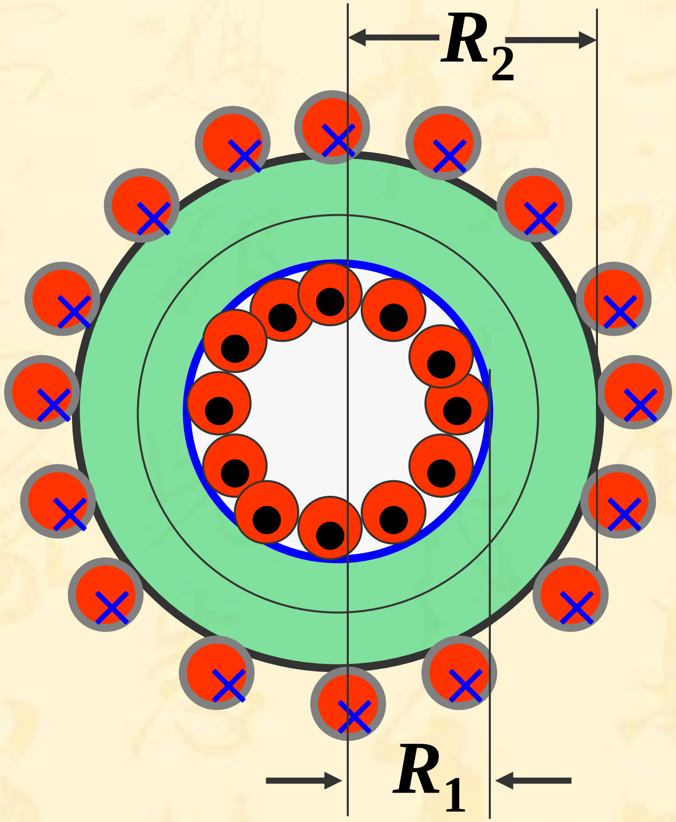
$$\boxed{H = \begin{cases} nI & (管内) \\ 0 & (管外) \end{cases}}$$

$$\boxed{B = \begin{cases} \mu nI & (管内) \\ 0 & (管外) \end{cases}}$$

3. 环形螺线管内的磁场分布







管外 $\vec{H}=0$

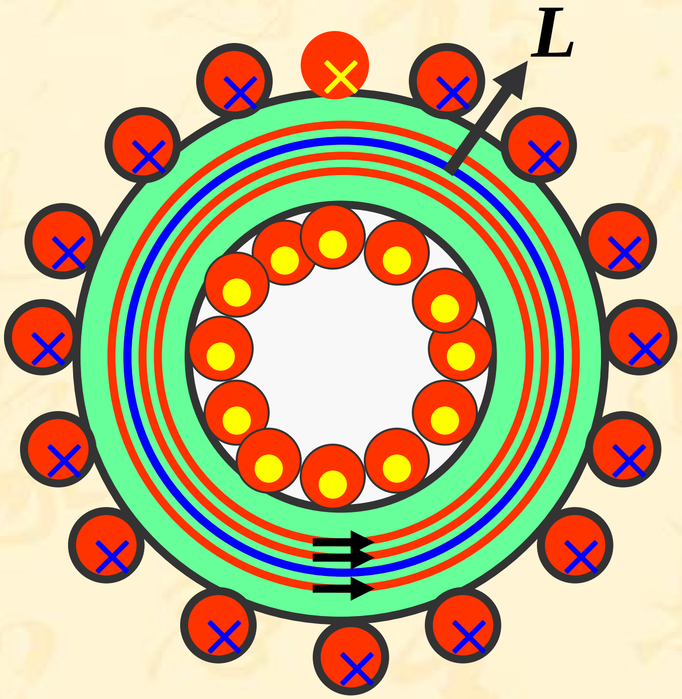
由对称性知，密绕螺线管内部$\vec{H}$是同心圆，而且在同一条$\vec{H}$线上，$\vec{H}$大小处处相等。

作半径为 r 的安培环路L

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\oint_L d\vec{l}$$

$$= H2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \qquad B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$



当$2\pi r >> d$（环直径）时，环内磁场均匀，令$L= 2\pi r$，则

$$\boxed{H = \frac{NI}{L} = nI}$$

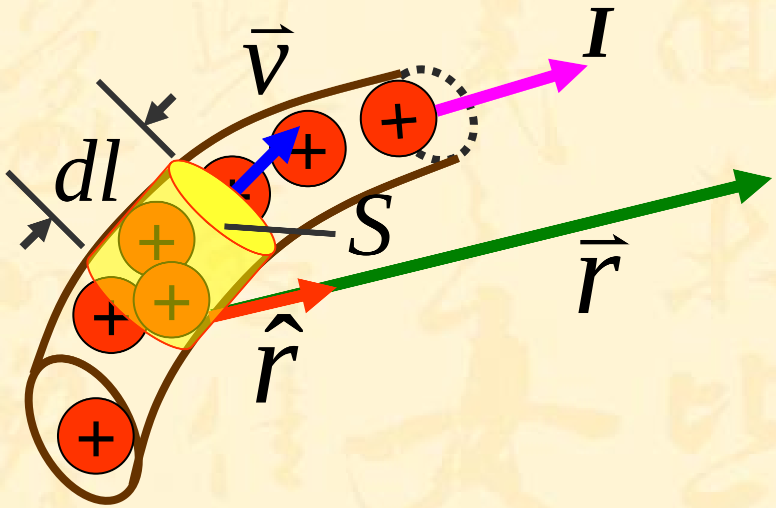
$$\boxed{B = \mu nI}$$

§ 15-5 运动电荷的磁场
(magnetic field of the moving charges)

电流产生的磁场可归结为大量运动电荷产生的磁场的总和，所以由电流产生的磁场可推出运动电荷的磁场.

$$Id\vec{l} \Rightarrow d\vec{B}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



设 ***Idl*** 截面积为***S***，运动电荷体密度为***n***，每个粒子带电量为***q***，以相同速率***v***运动，则电流强度***I=qnSv***。

Idl内有***dN=nsdl***个自由电子

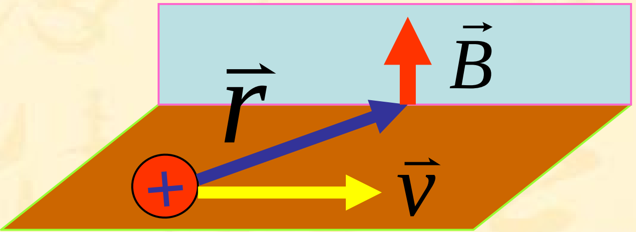
$d\vec{l}$方向与$\vec{v}$方向一致，

$$Id\vec{l} = qnvsd\vec{l} = qnsdl\vec{v} = dNq\vec{v}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{dNq\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

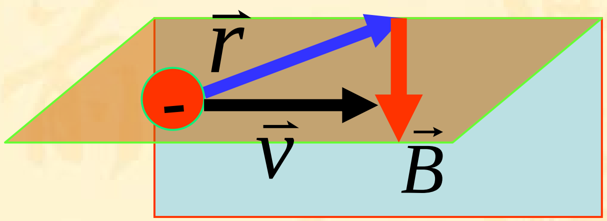
因而，每个带电量为q，速度为$\vec{v}$的粒子产生的磁场为

$$\boxed{\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$$

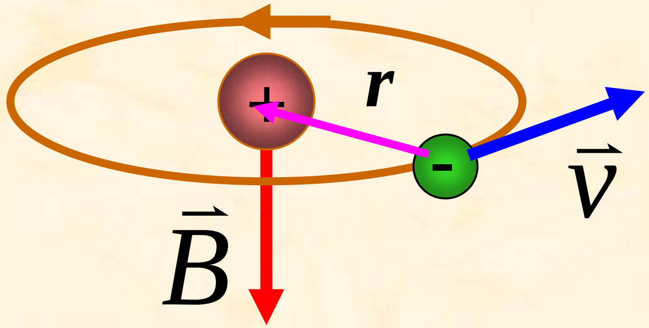


磁场大小：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin(\vec{v},\hat{r})}{r^2}$$



例：依波尔模型，氢原子中电子以 v =2.2×10^{6}m/s 在半径为 r = 0.53×10^{-8}cm 圆周上运动，求这电子在轨道中心所产生的磁感应强度及磁矩。

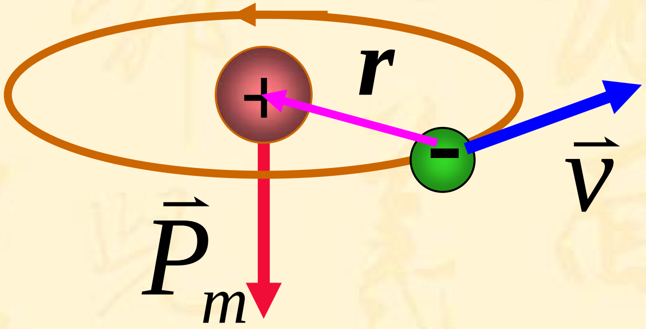


解：$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin 90^\circ}{r^2}$$

$$= 10^{-7}\frac{1.60\times10^{-9}\times2.2\times10^{6}}{(0.53\times10^{-10})^2} = 13(\mathrm{T})$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin 90^{\circ}}{r^2}=13(\mathrm{T})$$



$$I=f\left|e\right|=\frac{v}{2\pi r}\left|e\right|$$

$$P_m=IS=\frac{v}{2\pi r}\left|e\right|\pi r^2=\frac{1}{2}v\left|e\right|r$$

$$=\frac{1}{2}2.2\times10^{6}\times1.60\times10^{-19}\times0.53\times10^{-10}$$

$$=0.93\times10^{-23}(\mathrm{A/m})$$