第十五章 电流与磁场
（Current and the MagneticField）

§15-1 稳恒电流（Steady Current）

一、电流与电流密度

1. 电流强度 I

单位时间通过导体某一截面的电量:

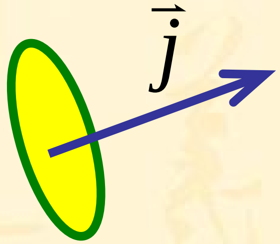
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

当通过任一截面的电量不均匀时，仅用电流强度来描述是不合适的，有必要引入一个可以描述空间各点电流的大小的物理量。

2. 电流密度$\vec{j}$

定义：单位时间内通过垂直于电流方向的单位面积的电量。

$$\boxed{\vec{j} = \frac{dI}{ds}\vec{n}}$$

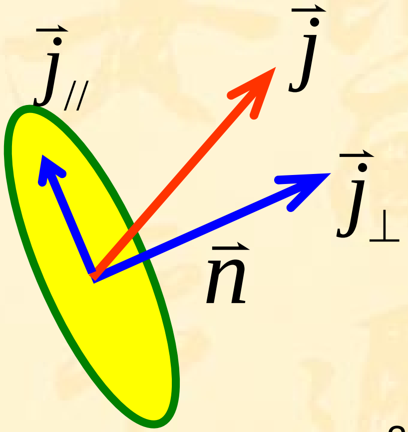


♠ I 与 $\vec{j}$的关系：

设某点处电流密度为 $\vec{j}$，$\vec{n}$ 为$d\vec{S}$ 面的法线方向。

$$\because \vec{j} = \vec{j}_\perp + \vec{j}_{//}$$

$$\therefore dI = |\vec{j}_\perp| dS = j_n dS = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



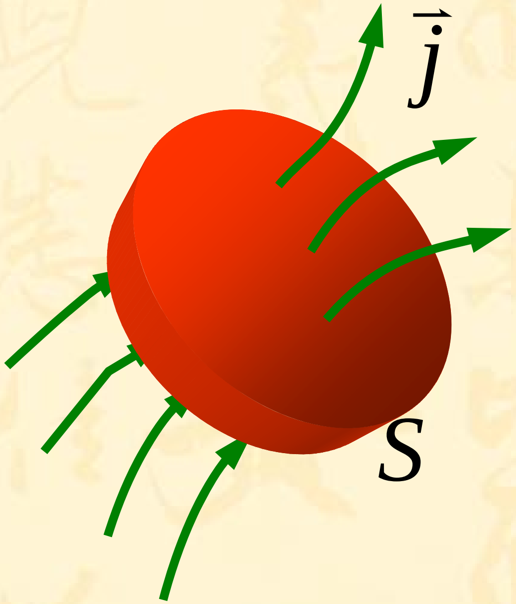
所以：

$$\boxed{I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}}$$

3. 连续性方程

✡ 根据电荷守恒，在有电流分布的空间作一闭合曲面，则单位时间内穿出该曲面的总电量等于曲面内电量的减少率:

$$I_{in}+I_{out}=-\frac{dQ}{dt}$$



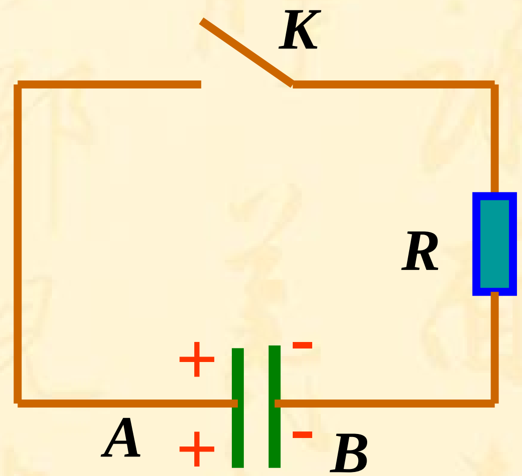
即:

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{s}\vec{j}\cdot d\vec{s}=-\frac{dQ}{dt}}$$

电流密度矢量的通量等于该闭合面内电荷的减少率.

4. 稳恒电流条件（电荷分布达到平衡）

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{s} = 0$$



5. 欧姆定律的微分形式

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$

二、电源电动势及维持稳恒电流的条件

1. 非静电力

●只有静电力作用不能使回路形成稳恒电流。例如带电平板电容器放电的过程，就仅仅是静电力作功的结果。

如果通过另一途径，使正电荷从**B**板再回到**A**板，就可以维持稳恒电流。这只能依靠某种与静电力完全不同的力——非静电力。

● 提供这种非静电力的装置称为电源。即

电源---使电路形成稳恒电流的非静电作用。

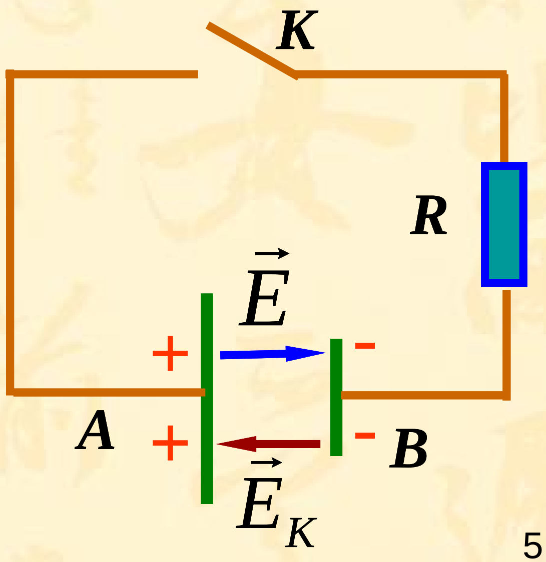
电源作用原理:

$\vec{E}_K$:作用于单位正电荷上的非静电力.

非静电力 $\vec{E}_K$ 将正电荷从 **B→A**，

以维持两极板间的正负电荷分布，形成稳恒电流。

平衡时 $\boxed{\vec{E} = -\vec{E}_K}$

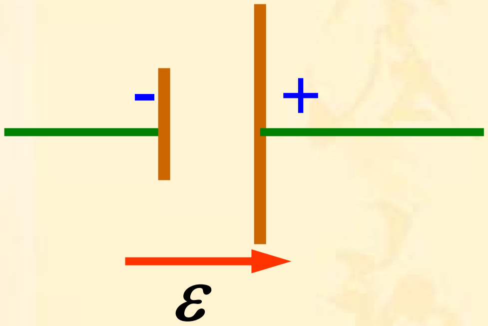


2. 电源电动势ε

把单位正电荷从电源负极通过电源内部移动到正极时非静电力所作的功，叫电源的电动势，即

$$\varepsilon = \int_{-\,(\text{电源内})}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

规定电动势的方向为：在电源内部由负极指向正极。



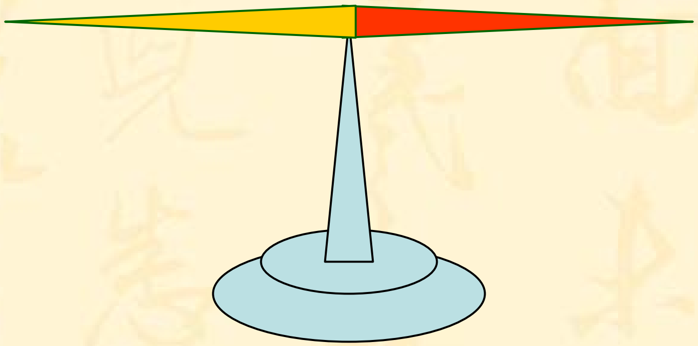
§15-2磁场、磁感应强度、磁场中的高斯定理
（Magnetic Field 、Magnetic Induction、Gauss law in a Magnetic Field)

一、基本磁现象

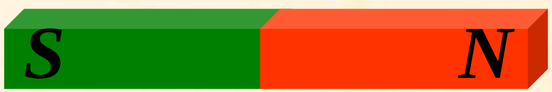
应用程序

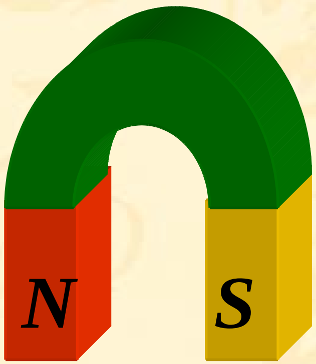
1. 永久磁铁及其特性

天然磁铁----磁铁矿（$F_{e3}O_4$）

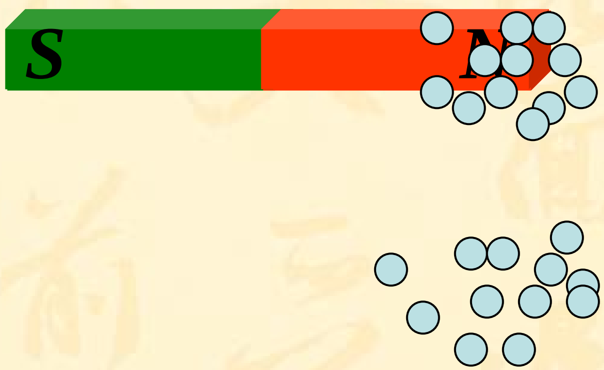


人造磁铁:



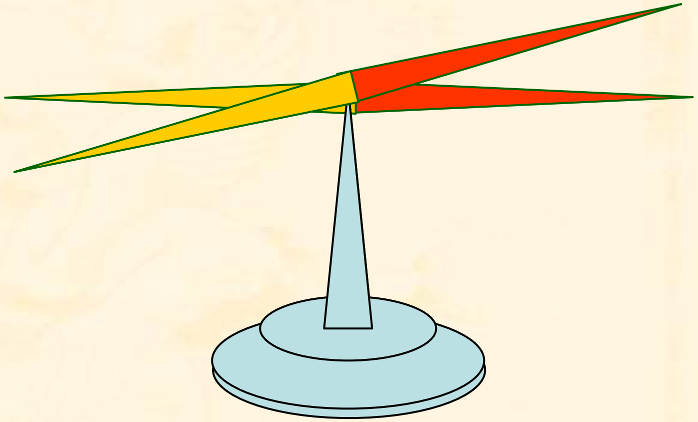


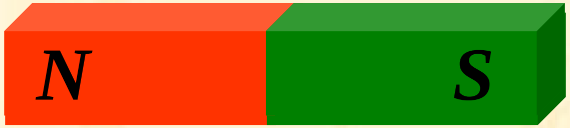
特性:

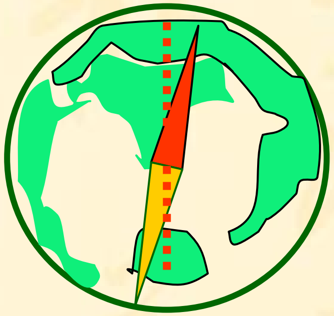


A. 能吸引铁、钴、镍等物质--这种性质叫磁性。

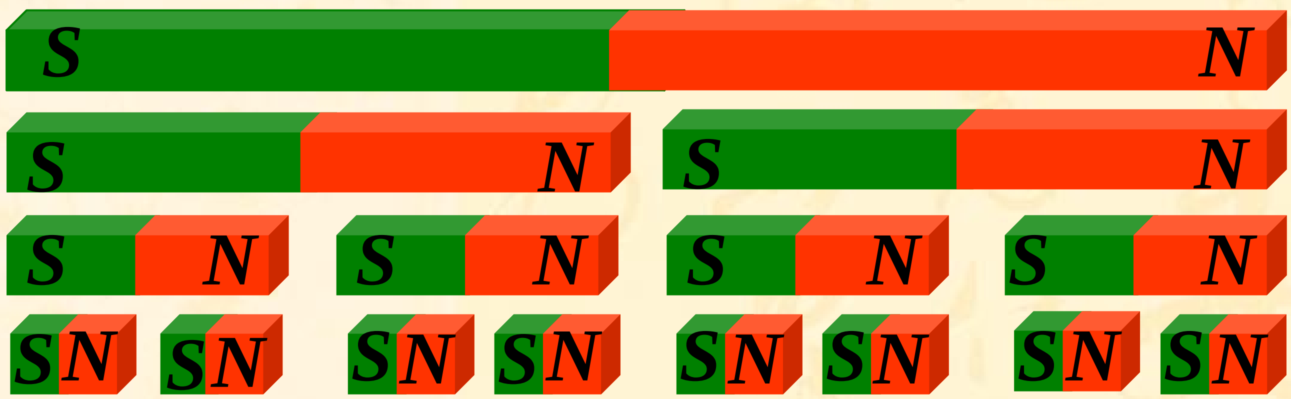
B. 具有两极且同性相斥，异性相吸。







C. 目前还无法获得磁单极

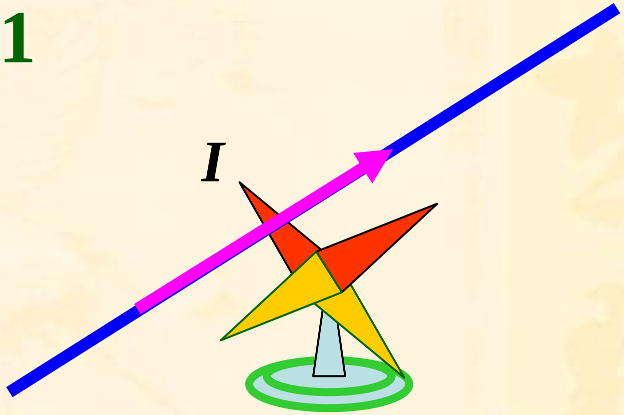


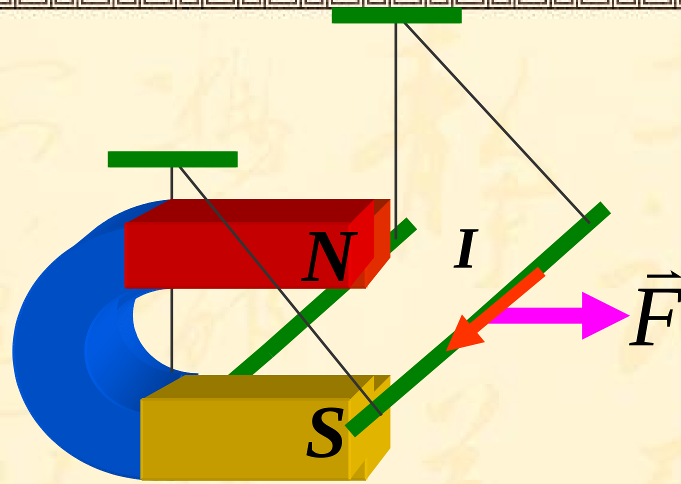
磁铁具有磁性、极性和极性的不可分割性。

2. 电流的磁效应、磁性的起源

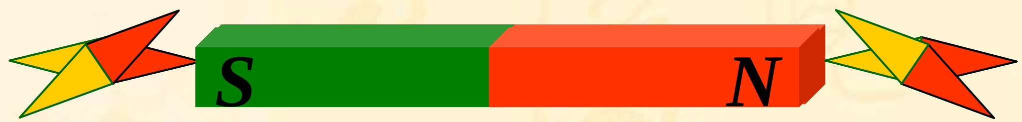
两个实验:

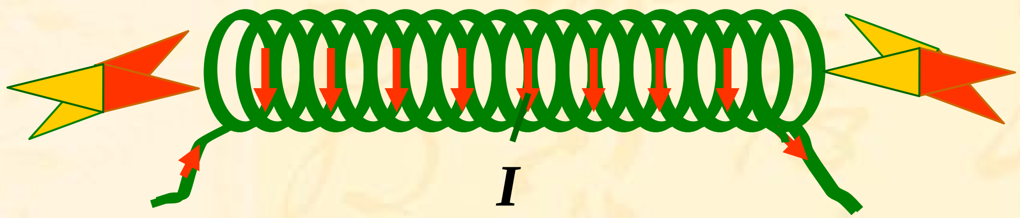
演示1

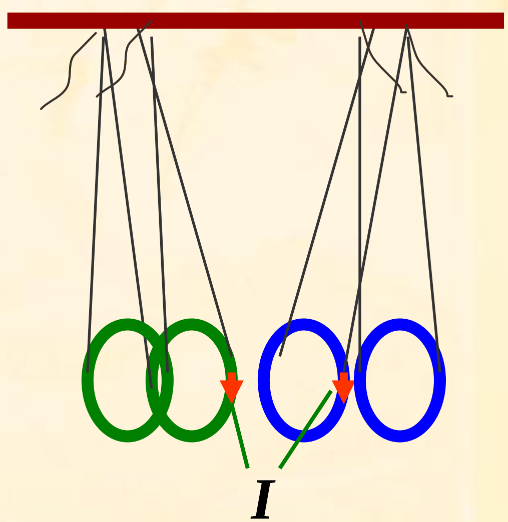


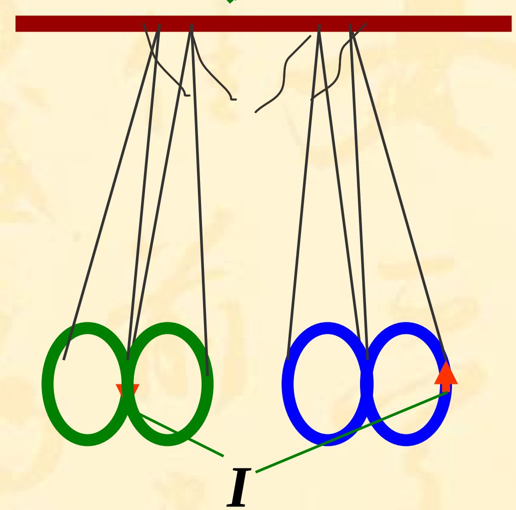


演示2









3. 电流与磁的关系

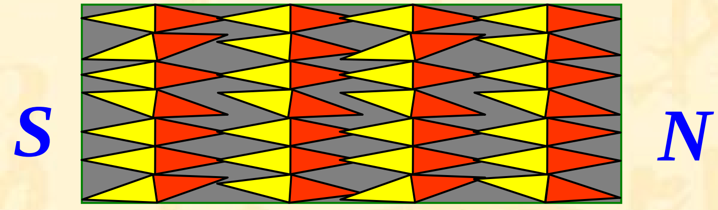
磁现象与电荷的运动密切相联。电荷运动可以产生磁现象，运动电荷本身也会受到磁力的作用。

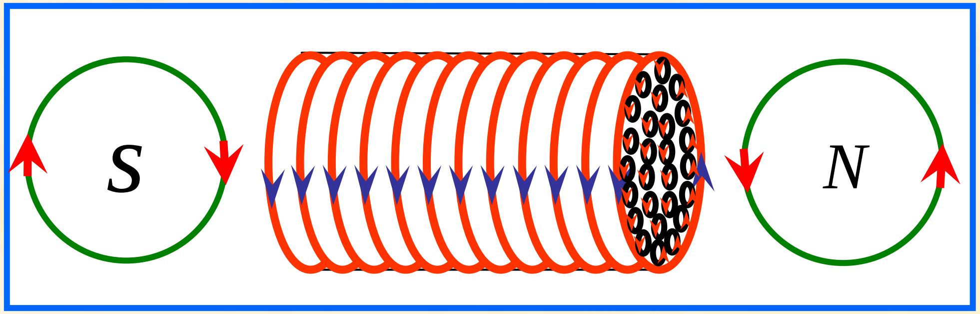
4. 安培分子环流假说（1822年）

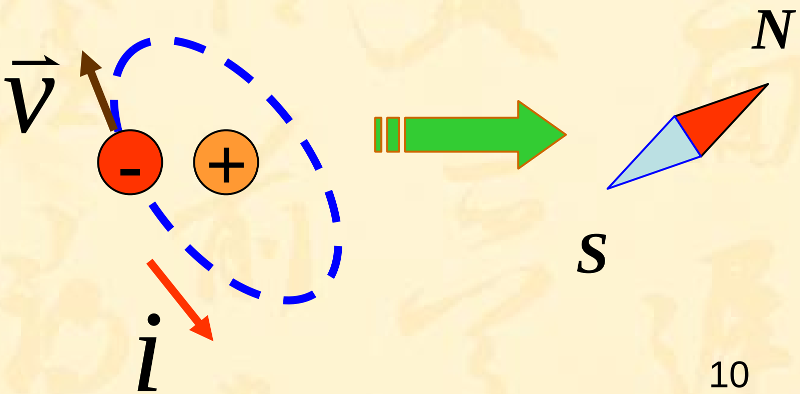
一切磁现象都是电流（电荷的运动）产生的。

组成磁铁的最小单元（磁分子）就是一环形电流，称为分子电流。

分子环流的定向排列，在宏观上就显示出物质的磁性。







安培假设可解释为什么不存在单一的磁极:

磁分子的两磁极对应于分子环流的正、反两面，因此两个磁极不可能分开而独立存在。

5. 磁现象的本质:

● 磁现象的本质是运动电荷之间的相互作用。这种作用是通过磁场这种特殊物质来传递的。

运动电荷 $\rightleftarrows$ 磁场 $\rightleftarrows$ 运动电荷

静止电荷 $\leftrightarrow$ 电场 $\leftrightarrow$ 静止电荷

二、磁感应强度 $\vec{B}$

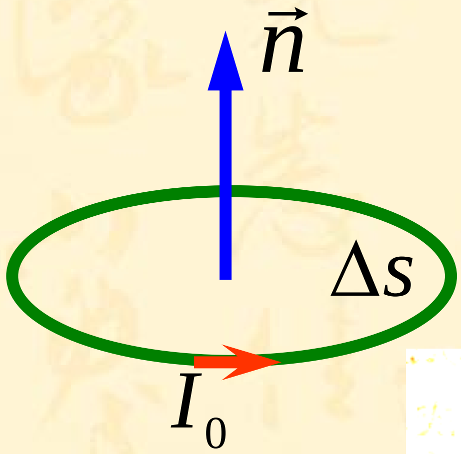
在磁场中引入试验线圈

要求其: $\begin{cases} \text{线度足够小（反映每一点的场的性质）} \\ \text{电流足够小（不会改变原场的性质）} \end{cases}$

线圈的磁矩

定义平面线圈的磁矩 $\vec{p}_m$

$$\boxed{\vec{P}_m = I_0 \Delta s \vec{n}}$$



$\vec{n}$的方向与电流方向满足右手螺旋关系，又称为线圈法线正方向或右旋单位法线矢量。

实验表明:

- 载流线圈在稳恒磁场中将受磁力矩而转动;
- 当线圈转至某一方向时，能达到稳定平衡。
- 线圈由平衡位置转过90^0时所受的磁力矩为最大磁力矩，且

$$M_{最大} \propto P_m$$

即，比值$M_{最大}/P_m$与实验线圈无关。

定义磁感应强度矢量 $\vec{B}$

$\vec{B}$的大小:

$$\boxed{B = \frac{M_{最大}}{P_m}}$$

$\vec{B}$的方向：实验线圈在某点处于稳定平衡时的法线方向 $\vec{n}$。

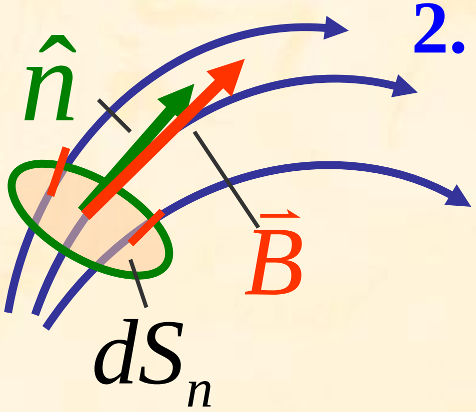
这一方向与置于该处的磁针的N极指向一致。

单位：特斯拉（T）　$1\mathrm{T} = 10^4$高斯

三、磁力线

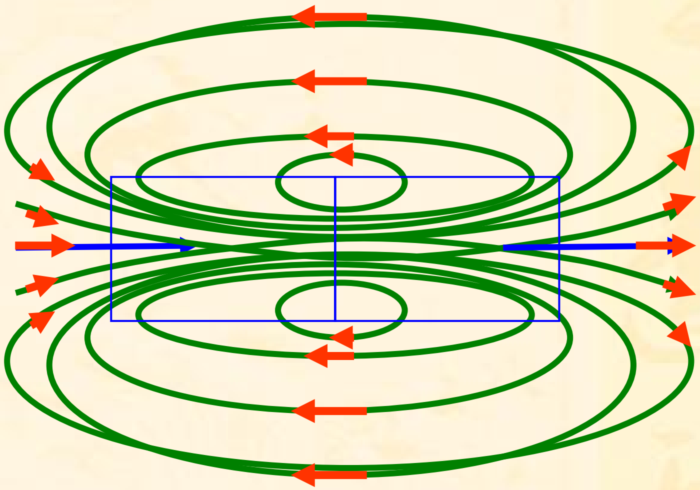
规定：1. 磁力线上各点的切线方向与该点的磁感应强度方向一致。

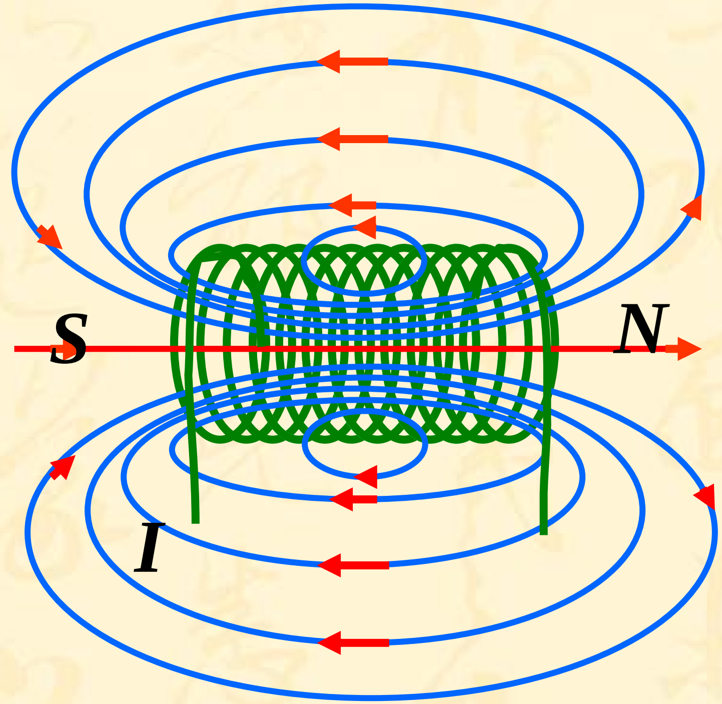
2. 垂直通过单位面积上的磁力线数目等于这一点磁感应强度的大小。

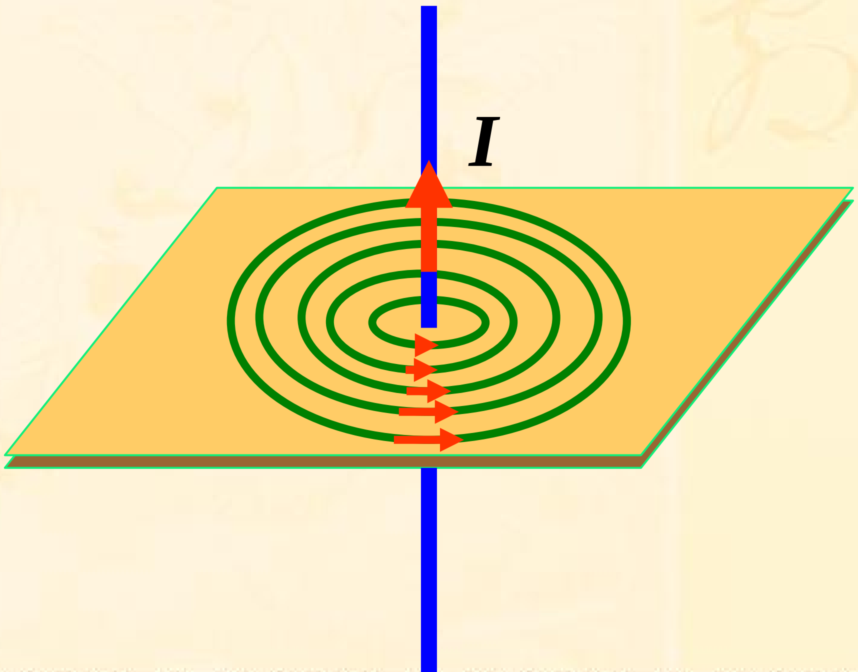


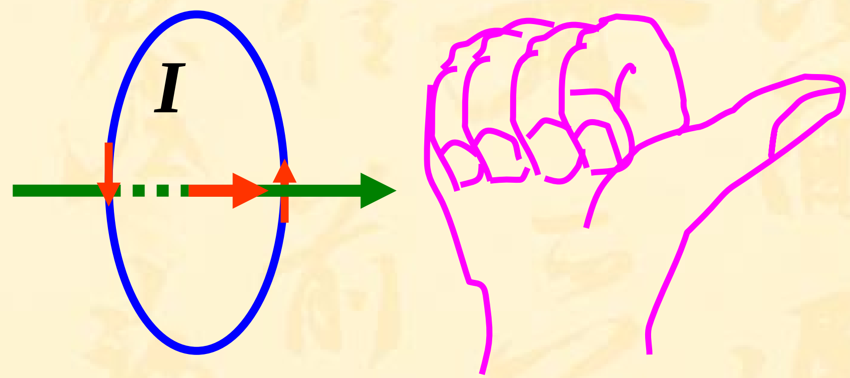
$$B = \frac{d\Phi_m}{dS_n}$$

几种常见的磁力线









磁力线的性质:

- 不相交，不中断，无头无尾的闭合曲线;

  说明磁场是一种涡旋场（无源场）。

- 与电流方向满足右手螺旋关系。

§ 15-3毕奥—萨伐尔定律（Biot--Savart law）

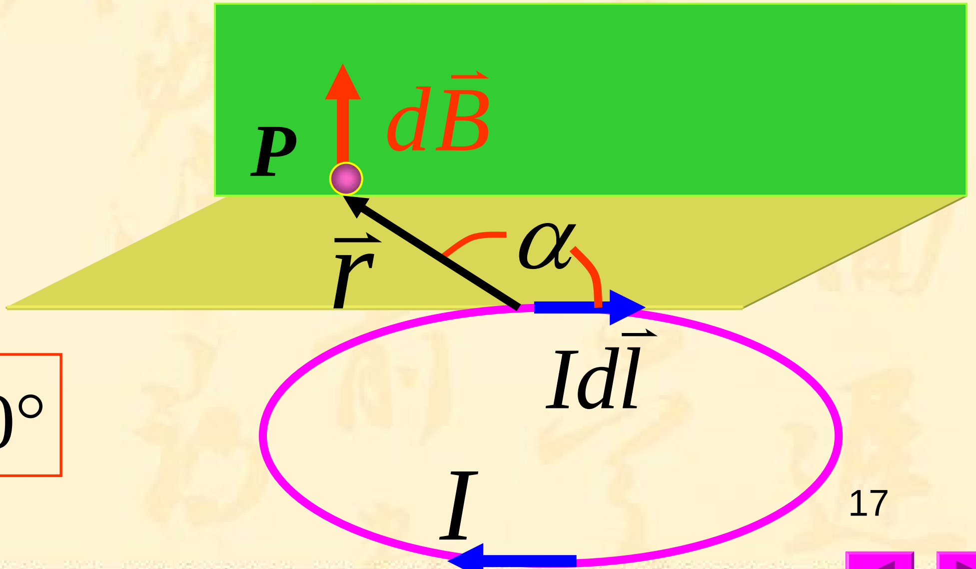
毕—萨定律研究一段电流元 $Id\vec{l}$ 产生的磁场。

一、毕奥—萨伐尔定律

任一电流元 $Id\vec{l}$ 在某点**P**所产生的磁感应强度的大小**dB**与 $Id\vec{l}$ 的大小成正比，与 $Id\vec{l}$ 和它到**P**点的矢径 $\vec{r}$ 间夹角的正弦成正比，与**r**的平方成反比，其方向为 $Id\vec{l}\times\vec{r}$ 的方向。

即，**B的大小:**

$$dB = k\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$



$\boxed{\alpha : d\vec{l}\text{与}\vec{r}\text{夹角且}\alpha\text{小于}180°}$

方向： 垂直于$I d\vec{l}$与$\vec{r}$组成的平面

$$d\vec{B} = k\frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

在国际单位制中， $k = \dfrac{\mu}{4\pi}$

所以 $$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

由毕—萨定律 $\boxed{d\vec{B}=\dfrac{\mu}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$ 可得出，

任意形状电流在某点**P**产生的磁感应强度为

$$\boxed{\vec{B}=\int d\vec{B}=\int\frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

真空中，$\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{TmA}^{-1}$，

μ_0称为真空中的磁导率。

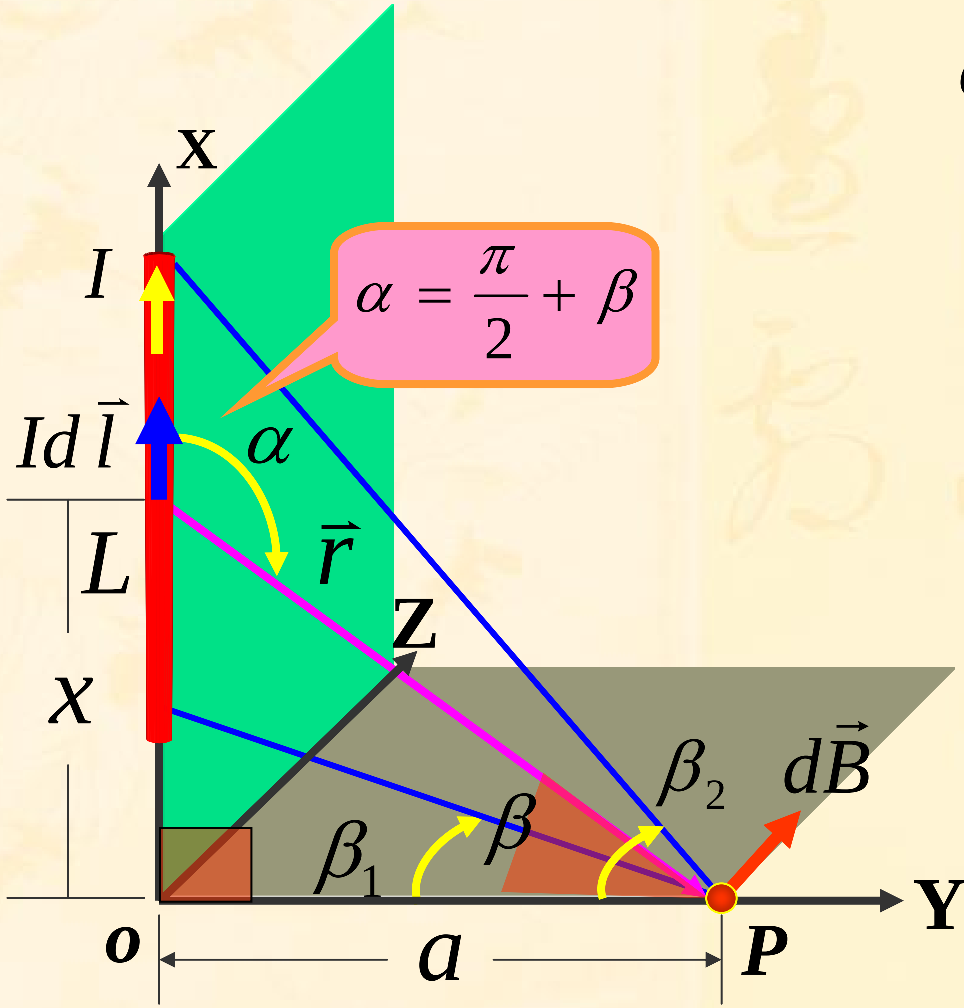
磁介质中，$\mu=\mu_0\mu_r$，μ_r 称为相对磁导率。

二、毕—萨定律的应用

1求载流直导线的磁场中任一点的磁感应强度

求: $\vec{B}_P$

解: 建立坐标系，分割电流。



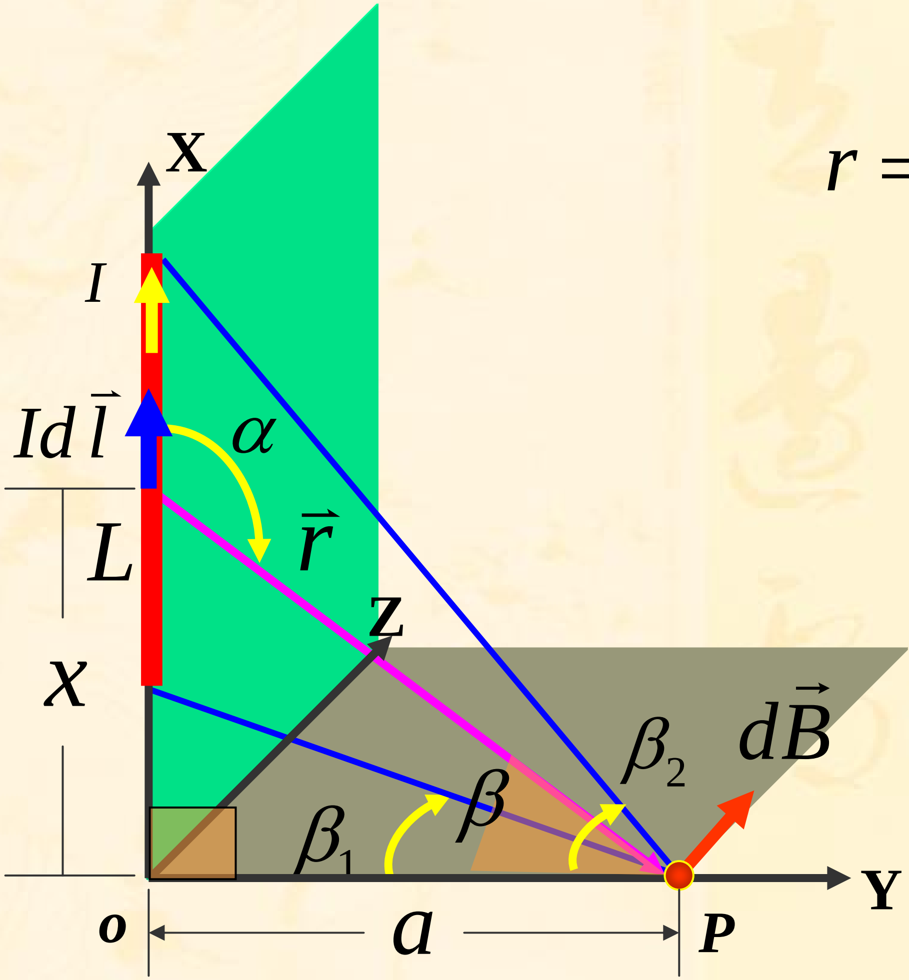
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Idx\sin\alpha}{r^2}$$

统一变量:

$$\sin\alpha = \cos\beta$$



$$r = \frac{a}{\cos\beta}$$

$$x = a\,tg\,\beta$$

$$dx = a\sec^2\beta\, d\beta$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{a\sec^2\beta\, d\beta \cdot \cos\beta}{a^2\sec^2\beta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{a\sec^2\beta d\beta\cdot\cos\beta}{a^2\sec^2\beta}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

方向沿Z轴

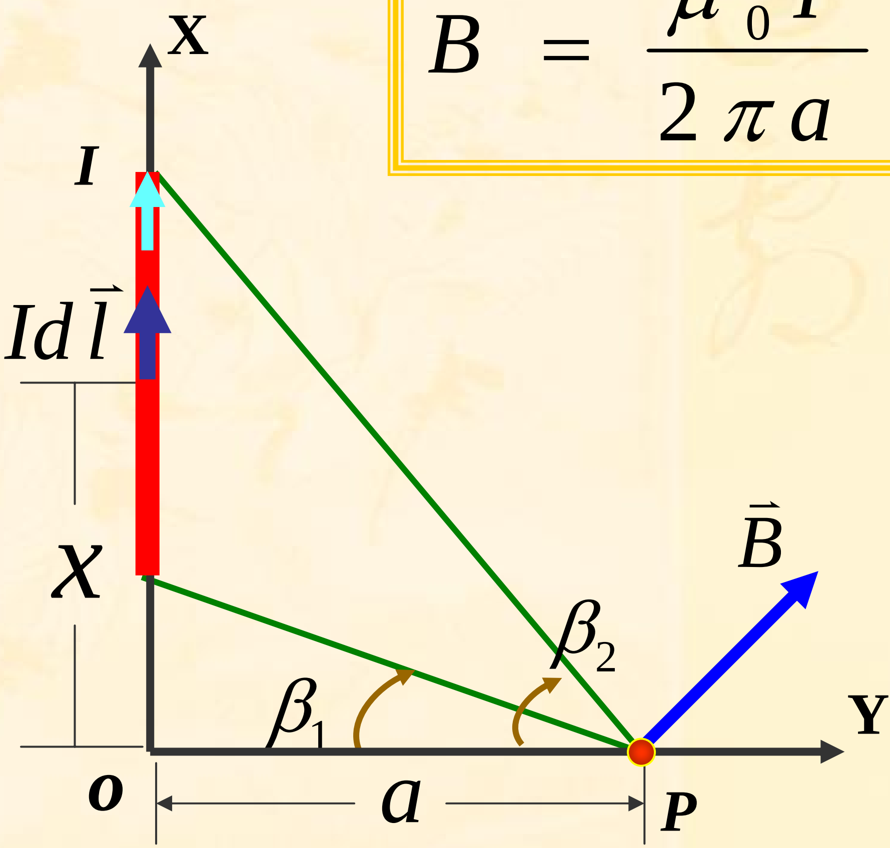
$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)\hat{k}}$$

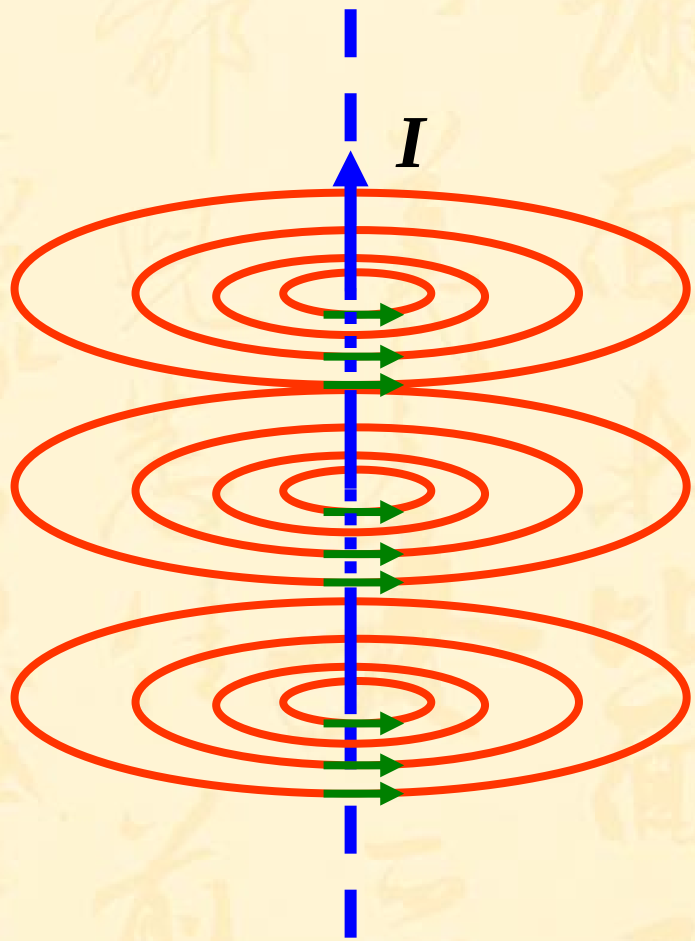
讨论 1. 对无限长直载流导线:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

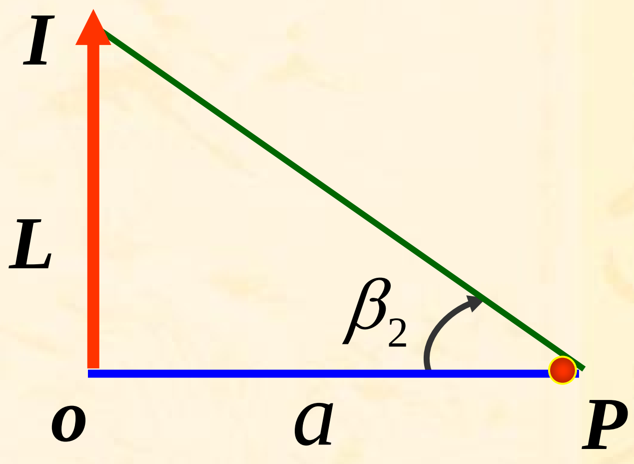
$$\beta_1 = -\pi/2 \quad \beta_2 = \pi/2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

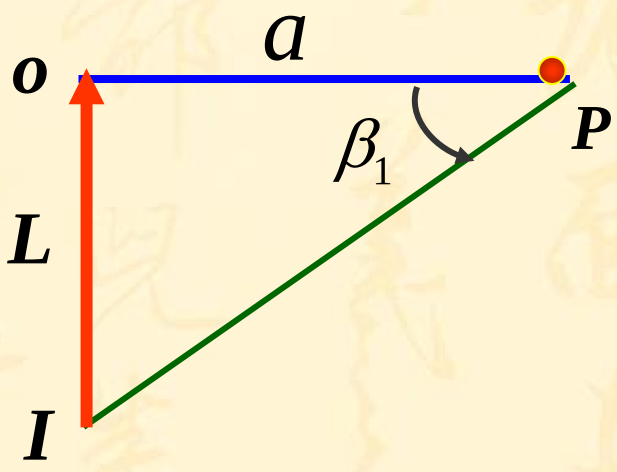




2. 在半无限长直线电流的端点



或



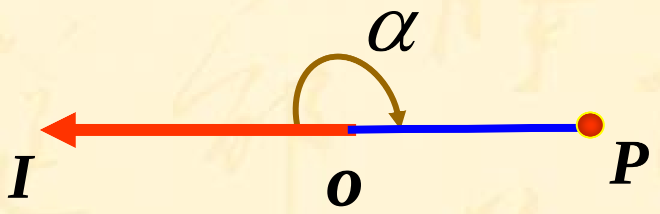
$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = \frac{\pi}{2} \text{或} \beta_1 = -\frac{\pi}{2},\ \beta_2 = 0$$

$$\boxed{B = \frac{\mu I}{4\pi a}}$$

3. *P*点在直线电流的延长线上

$\alpha = 0$ 或 π，则

$$\boxed{B = 0}$$

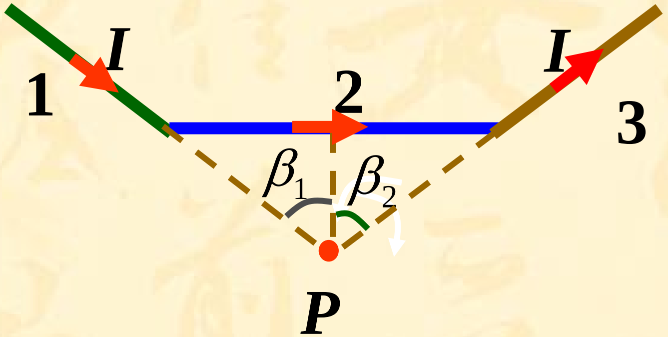


例:

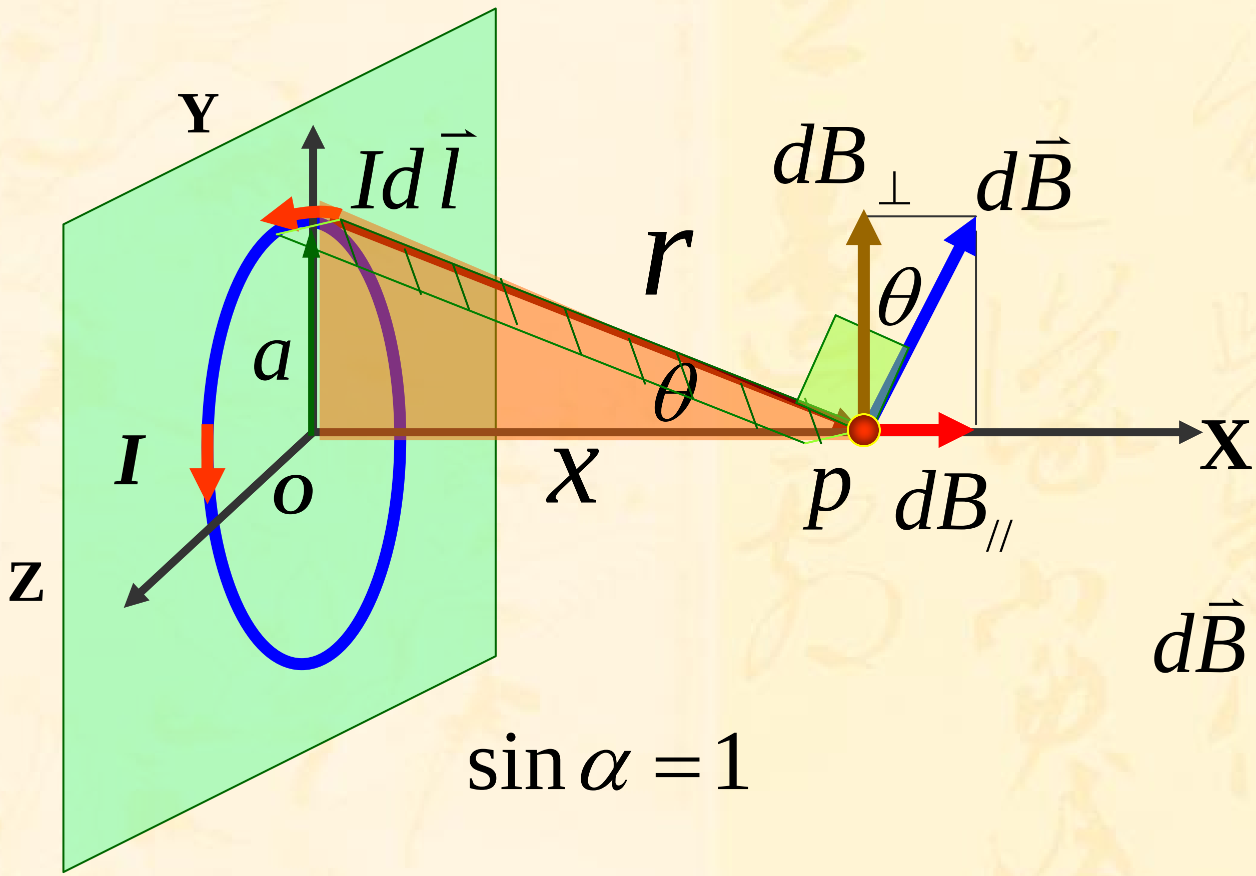
*P*点在电流"1"和"3"的延长线上，所以*P*点的磁场仅由电流"2"产生，即

$$B_P = B_2$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi a}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$



例2：求载流圆线圈在中心轴线上所产生的磁场



解：分割电流

依毕--沙定律

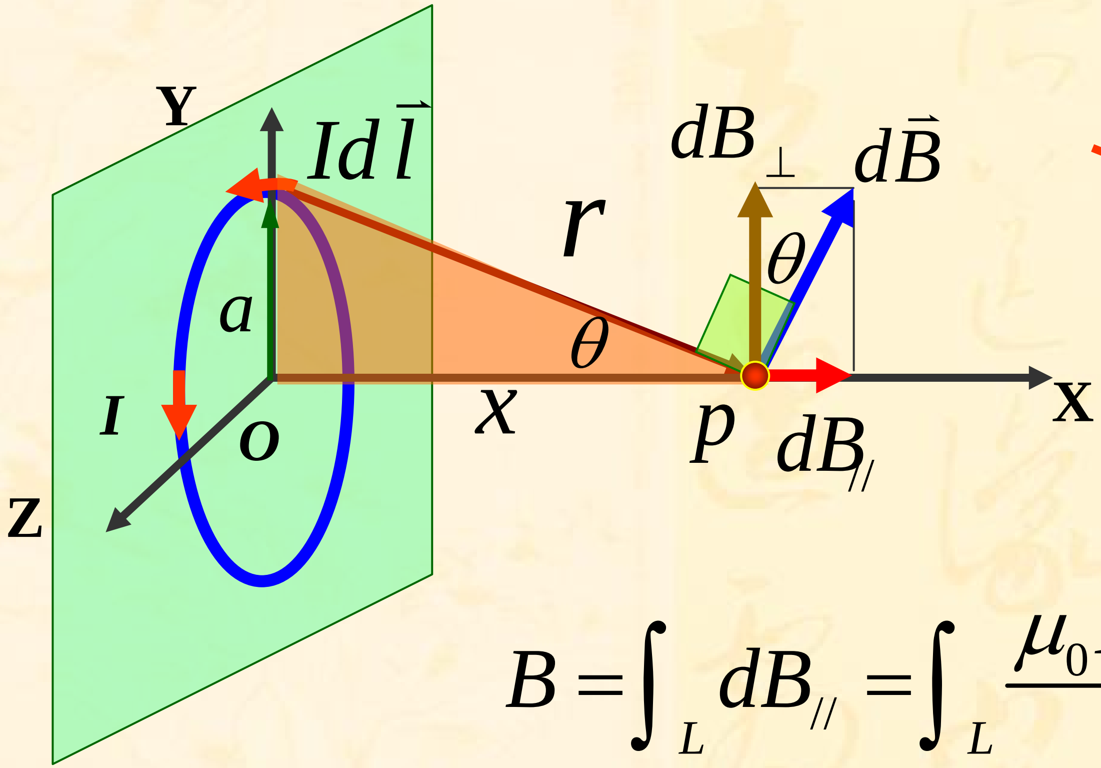
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

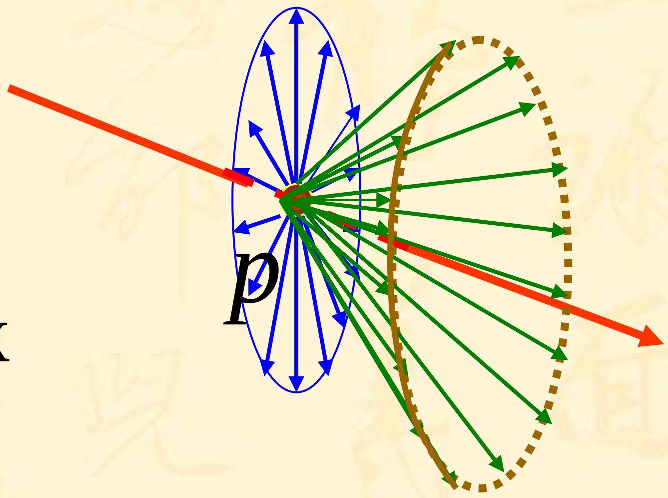
$$\sin\alpha = 1$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

$$dB_{//} = dB\sin\theta$$

$$dB_\perp = dB\cos\theta$$

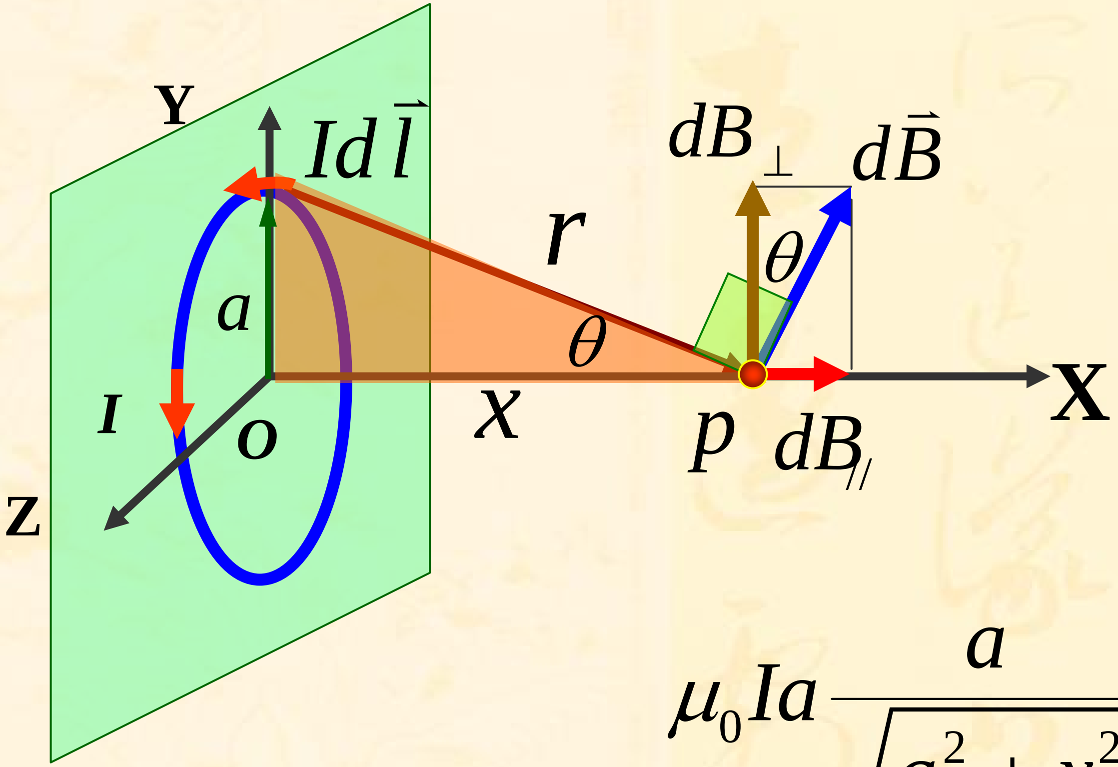




$$B=\int_L dB_{//}=\int_L \frac{\mu_0 Idl\sin\theta}{4\pi r^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\oint_L dl=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}2\pi a$$

$$=\frac{\mu_0 Ia\sin\theta}{2r^2}$$



$$r^2 = a^2 + x^2$$

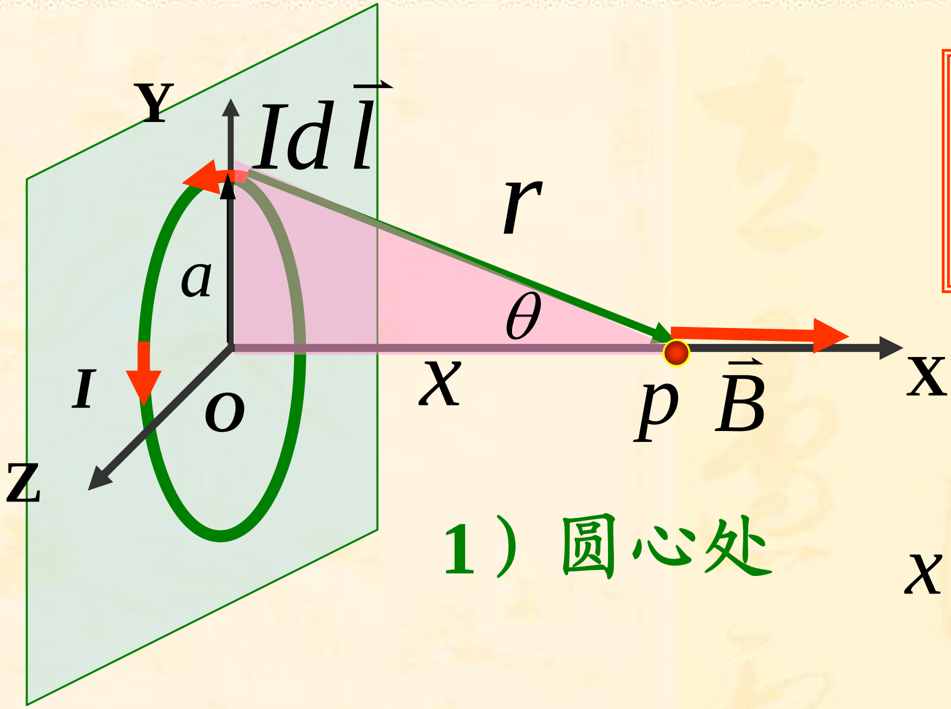
$$\sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I a \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{2(a^2 + x^2)} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i}$$

$$\boxed{s = \pi a^2}$$

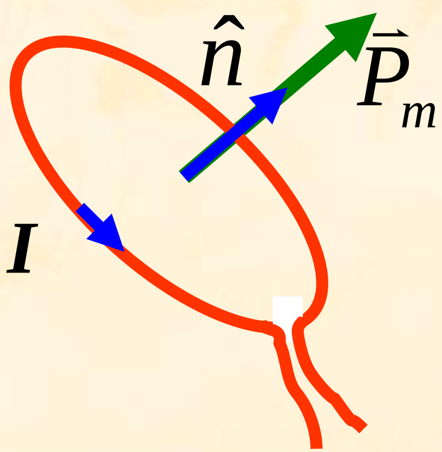


$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi(a^2+x^2)^{3/2}}\hat{i}}$$

讨论:

1）圆心处 $x=0 \quad B=B_o=\dfrac{\mu_0 I}{2a}$

2）$x>>a, x\approx r \quad B=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\cdot\dfrac{IS}{r^3}$



线圈磁矩:

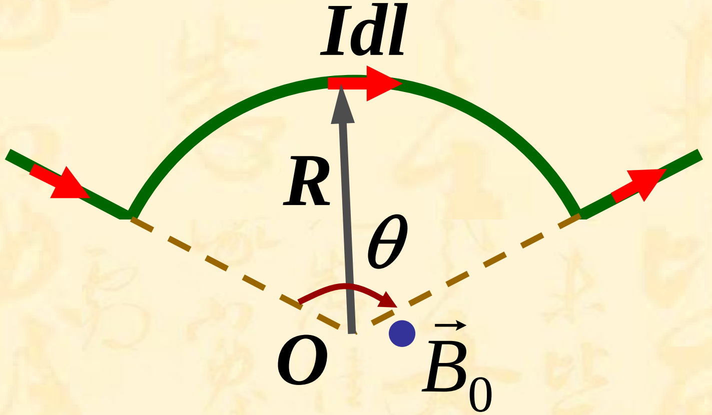
$$\vec{P}_m=IS\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\vec{P}_m}{r^3}}$$

3. 在一段圆弧的圆心处

$$B_o = \int_L \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot R\theta$$

$$\boxed{B_o = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}}$$

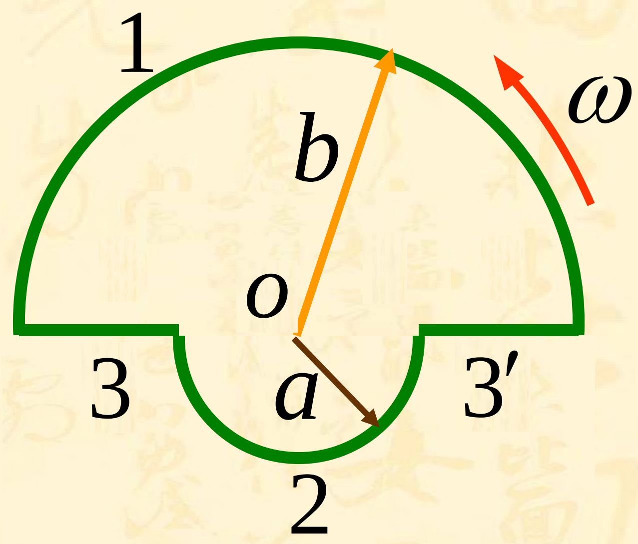


例: 半圆的圆心处

$$\theta = \pi, \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

例3: 有一闭合带电体，由半径分别为a、b的半圆连接而成，其上电荷线密度为λ，当回路以角速度ω绕过O点的轴转动时，求O点的磁场。

解: 整个回路由半圆1，2及直线段3，3′组成



对半圆1 $T=\dfrac{2\pi}{\omega},\ f=1/T$

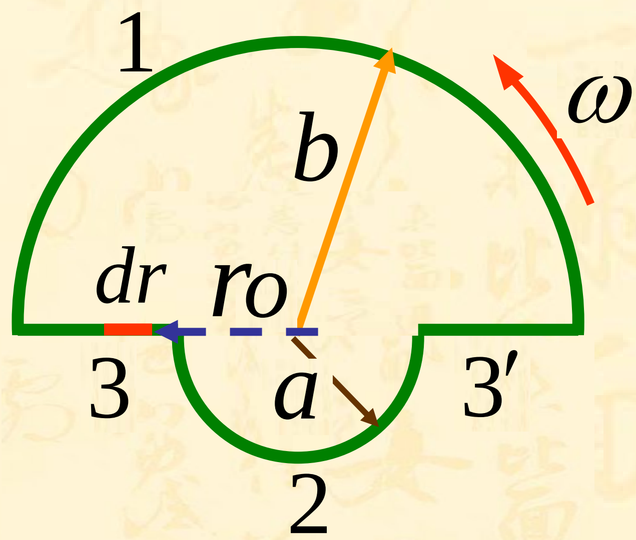
电量 $q=\lambda\pi b$

电流 $I_1=f\cdot q=\dfrac{l\pi b}{2\pi/\omega}=\dfrac{lb\omega}{2}$

相当于半径为b，电流为I_1的圆电流。

在O点产生的磁场B为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2b}=\frac{\mu_0}{2b}\frac{\lambda b\omega}{2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$



同理，半圆2也可看成一圆电流

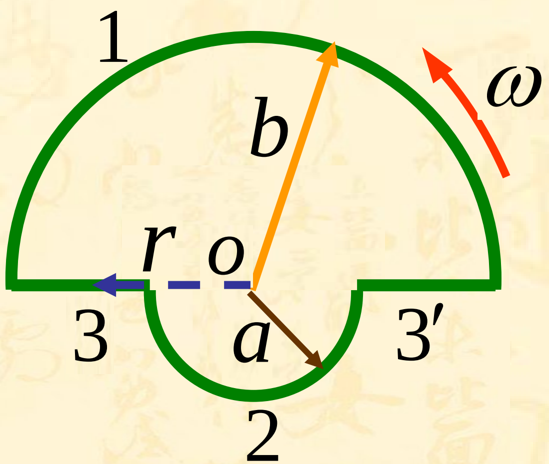
$$B_2=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$$

对直线段3：取微元dr，其电量 dq =λ dr

相当于 $dI_3=f\cdot dq=\frac{\lambda dr}{2\pi/\omega}=\frac{\omega\lambda dr}{2\pi}$ 的圆电流，

其半径为r

则：$dB_3=\dfrac{\mu_0 dI_3}{2r}=\dfrac{\mu_0\omega\lambda dr}{4\pi r}$



$$B_3=\int_a^b \frac{\mu_0\omega\lambda dr}{4\pi r}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

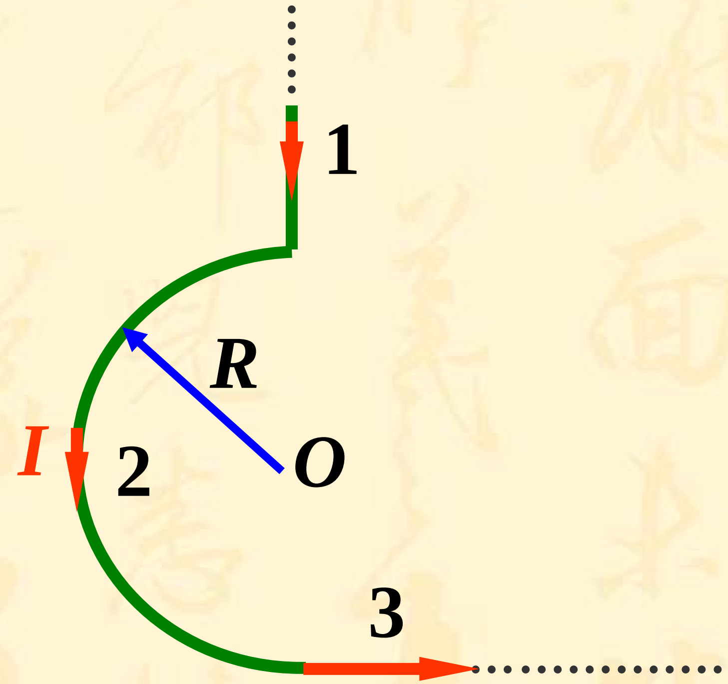
同理，对直线段3′：$B_{3'}=\dfrac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

$\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$、$\vec{B}_3$、$\vec{B}_{3'}$ 方向相同，均垂直于板面向外。

$$B=B_1+B_2+B_3+B_{3'}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}[\pi+\ln\frac{b}{a}]$$

例5: 如图，求$\boldsymbol{B_O}$

分析 $\vec{B}_O=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$



$\vec{B}_1$:直导线的延长线上的磁场。

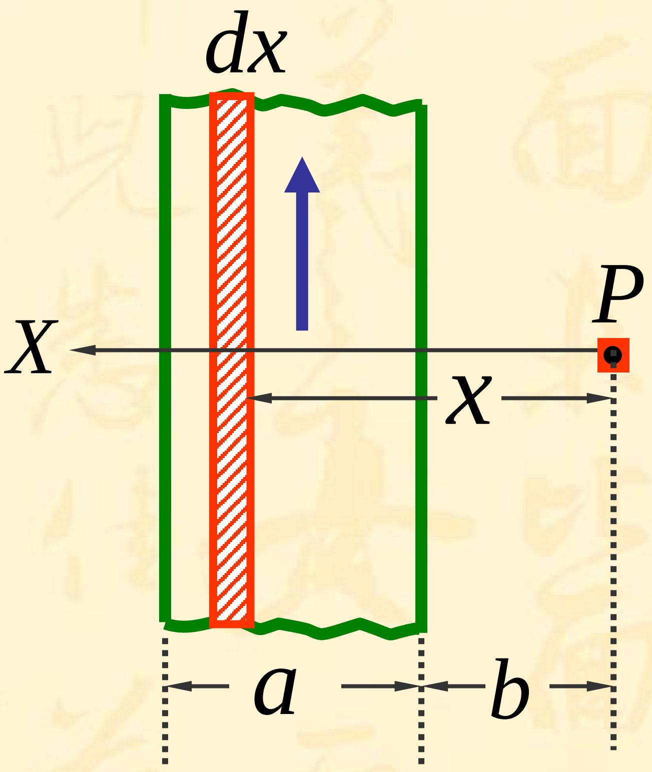
$\vec{B}_2$:半圆形电流在圆心处的场。

$\vec{B}_3$:半无线长直导线端点的场。

$$B_O=B_1+B_2+B_3=0+\frac{\mu_0 I}{4R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

例6: 如图，无限长平板宽a，单位宽度内电流为δ，求与板共面的P点（离边缘距离为b）的$\vec{B}$

解: 取微元宽dx，则$di=\delta dx$



$$dB=\frac{\mu_0 di}{2\pi x}=\frac{\mu_0\delta dx}{2\pi x}$$

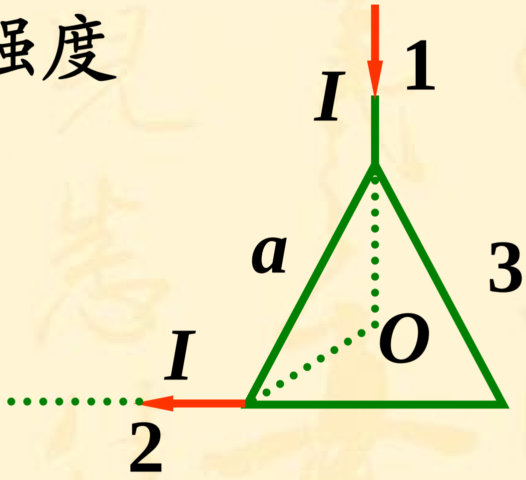
方向: $\otimes$

$$B=\int_b^{a+b}\frac{\mu_0\delta dx}{2\pi x}=\frac{\mu_0\delta}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

例：三角形线框电阻均匀分布，求O点的磁感应强度B_O。

问题:

三角形线框在O点产生的磁感应强度B_{Δ}为多少？



答案：$B=0$

思考:

三角形边长a，电流I已知。