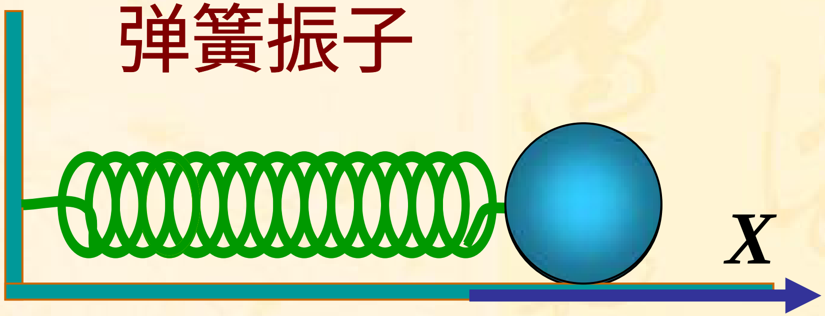
第四章 机械振动(Mechanical Oscillation)

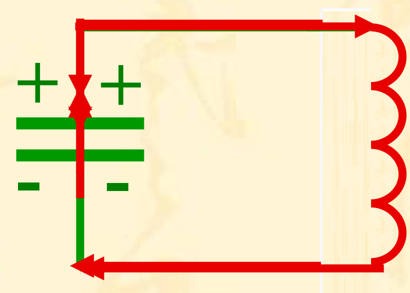
●振动是自然界中的一种普遍运动形式。

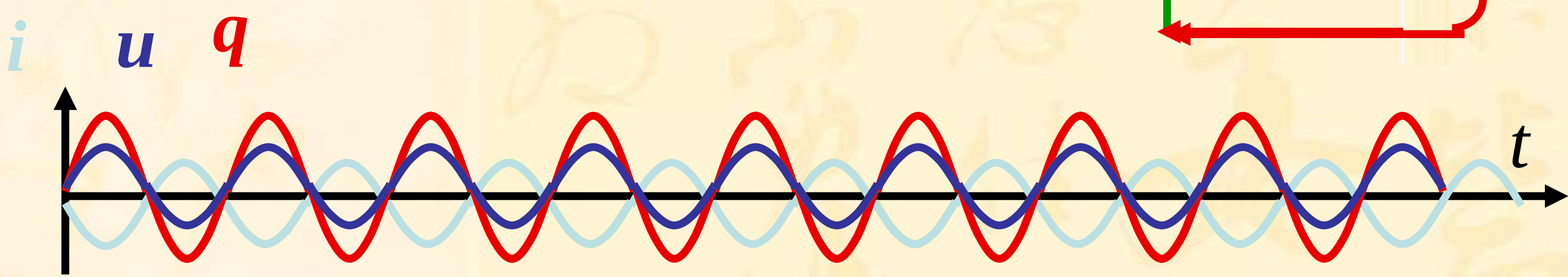
是一种周期运动→运动具有重复性。

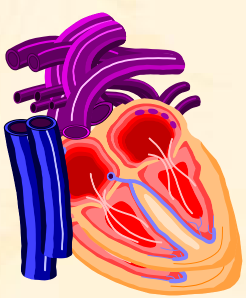
弹簧振子



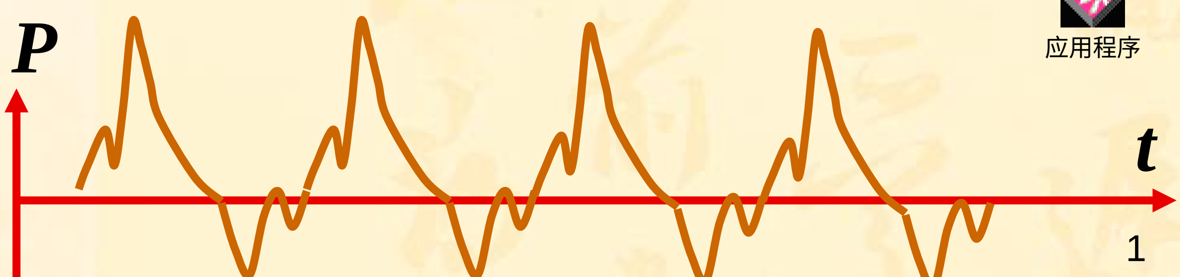
振荡电路





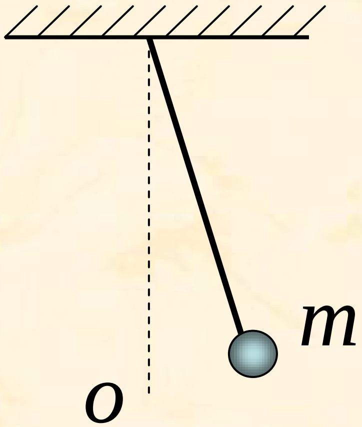


应用程序

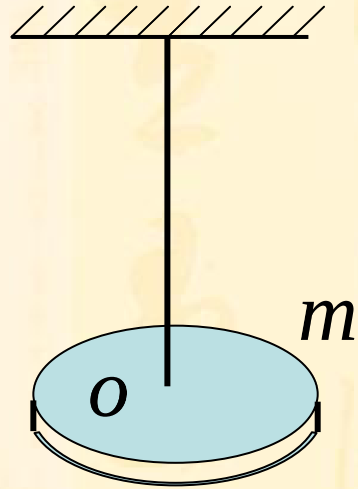


应用程序

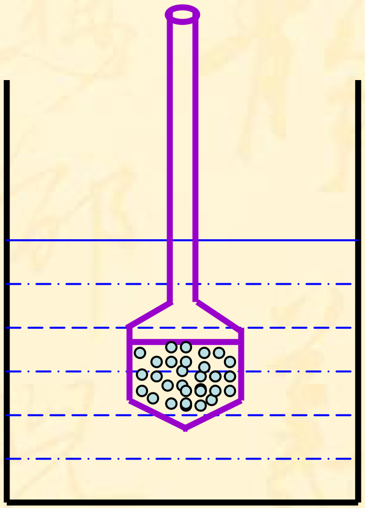
心房室压强



(a) 单摆



(b)扭摆



(d) 浮体

振动的一般概念---一个物理量在某一定值附近作周期性变化，则相应的运动称为振动。如电磁波、交流电等。

机械振动--物体在平衡位置附近作来回往复地周期运动，简称振动。

§4-1 简谐振动（Simple harmonic motion）

意义：

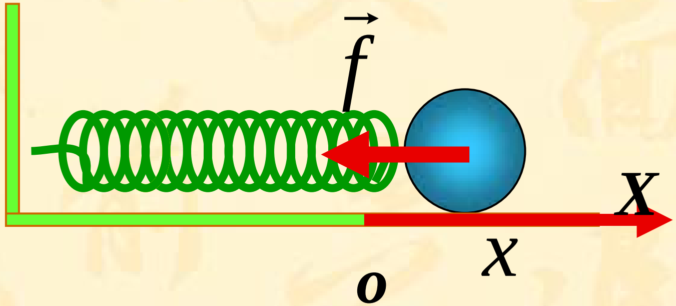
- ◆简谐振动是一切振动中最基本、最简单的振动形式。
- ◆任何复杂的振动都是由简谐振动合成的，简谐振动是其他振动的基础。

一、弹簧振子与简谐振动

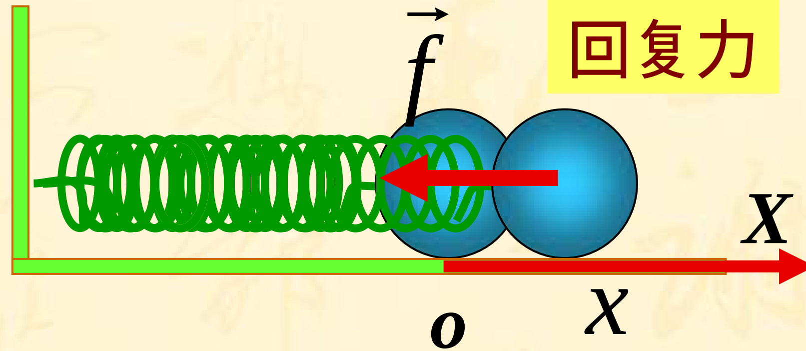
◎弹簧振子的运动是典型的简谐振动。

弹簧振子模型：

轻弹簧＋质点m。质点只在弹力的作用下运动。



简谐振动的特点



受力：$f=-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

令 $\dfrac{k}{m}=\omega^2$ 得

ω由系统本身性质决定，与外界无关.

谐振动定义式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

简谐振动的微分方程

其解为：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

简谐振动的位移

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

二、简谐振动的周期性

● *x*、*v*、*a*均为时间的周期函数，其中：

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega},\quad \nu=\frac{1}{T},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu}$$

弹簧振子的周期：

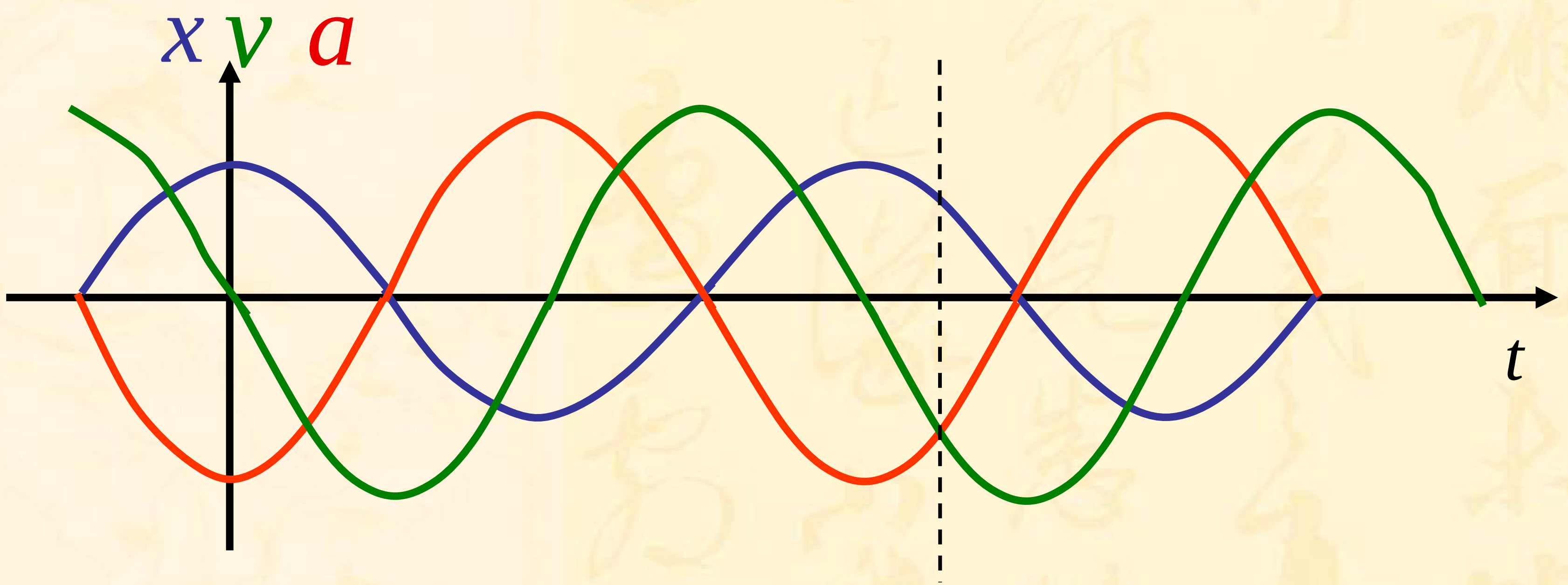
$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\qquad \frac{k}{m}=\omega^{2}$$

●仅由振子本身的力学性质决定，称固有周期.

◆ ν和ω分别称固有频率和固有圆频率。

x-*t*, *v*-*t*, *a*-*t* 曲线

令 $\varphi = 0$



◆简谐振动的位移、速度和加速度的周期变化不同步。

三、简谐振动的振幅和位相

振幅 *A*——质点离开平衡位置的最大位移。

振动的位相

由简谐振动方程可看出：

- 当 A、ω 一定时，在任一时刻t，振动状态完全取决于量 $\omega t+\varphi$。
- 称$\omega t+\varphi$为位相或周相。(相表示状态)

位相的概念和意义

- 一定的位相对应着一个确定的运动状态。
- 位相$\omega t+\varphi$在一个周期内经历从0—2π的变化，所以：
- ◆在一个周期内，物体所经历的运动状态各不相同，不可能重复。

举例说明：

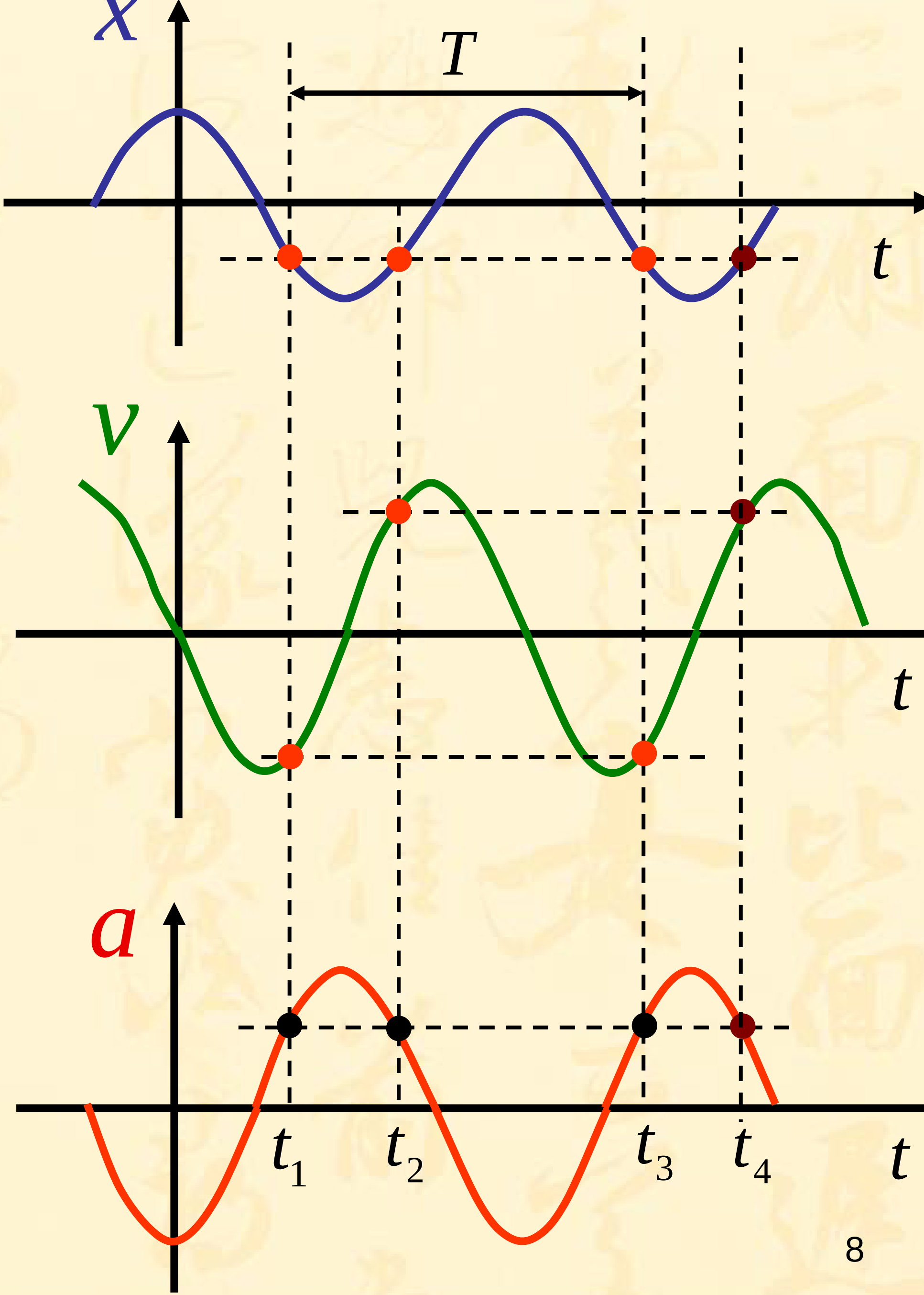
$$x = A\cos\omega t$$

同一周期中找不到 $x,v,a,$全同的两点。

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

说明同一周期中不存在全同的两个运动状态。

$$a = -A\omega^2\cos\omega t$$



●两个相同的运动状态之间的相位差为2π的整数倍.

关于位相的应用举例：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

1. 确定任一时刻 t 物体的振动状态。

例：已知 t_1时刻，$\omega t_1+\varphi=\pi/2$，则可得出：

$$\boxed{x = 0, \quad v = -A\omega, \quad a = 0.}$$

◎ t_1时刻质点恰过平衡位置，并以速率 $A\omega$向负方向运动；

2.由位相差确定同一时刻，不同物体的振动状态的差别。

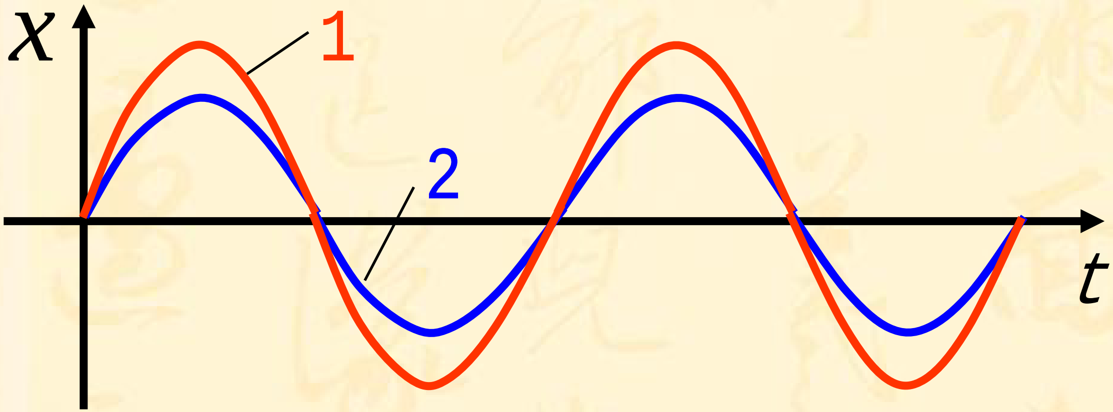
设 $m_1 : \omega_1 t + \varphi_1, \qquad m_2 : \omega_2 t + \varphi_2$

则位相差

$$\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$$

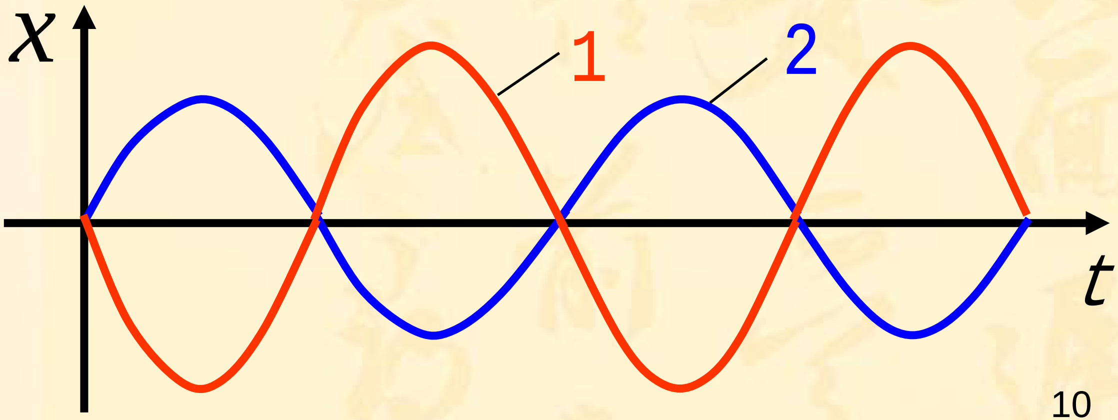
例如：　♥ 当 $\Delta\varphi = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,

◆两振动同相。即两运动完全同步。



♥ 当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,

◆两振动反相。

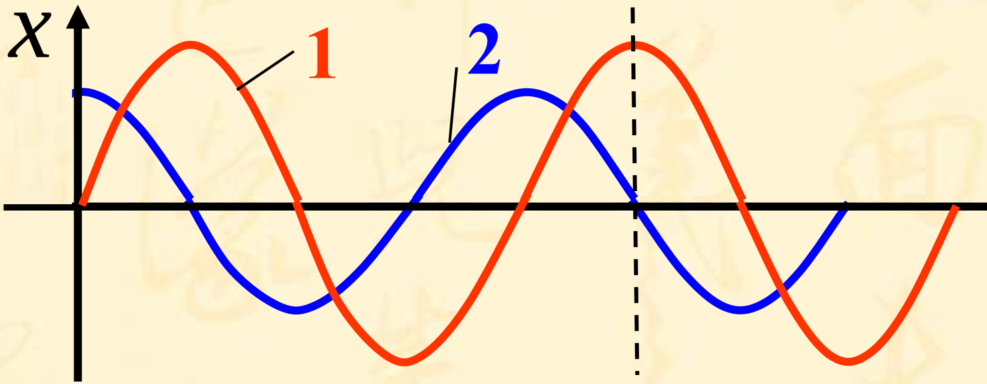


♥ 当 $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) > 0$

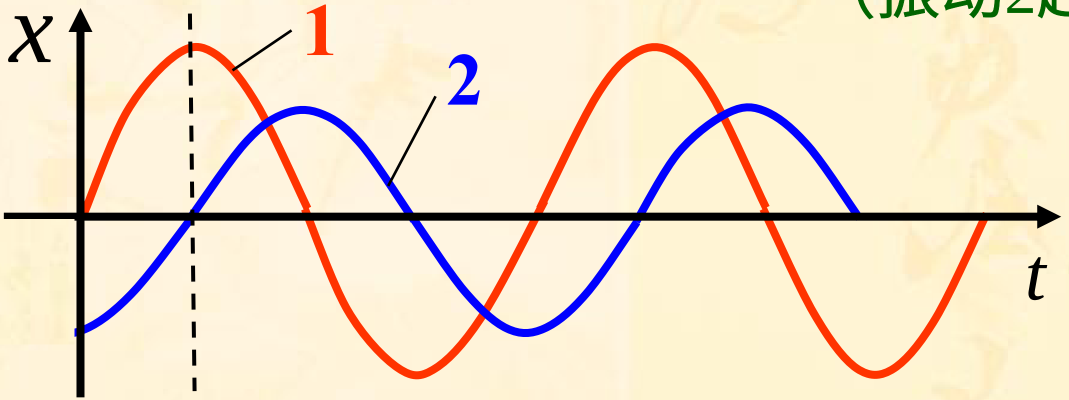
◆振动“2”超前于振动“1”。

♥ 当 $\Delta\varphi < 0$

◆振动“2”落后于振动“1”。

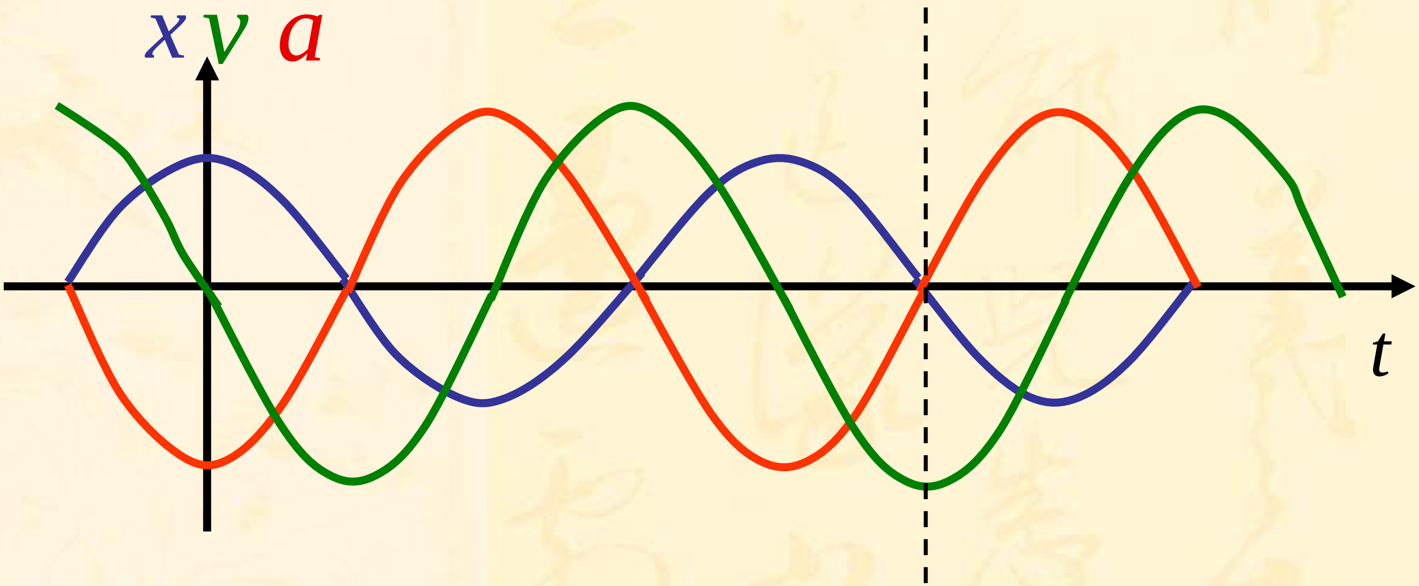


（振动2超前于振动1，$\Delta\varphi = \pi/2$）



（振动2落后于振动1，$\Delta\varphi = -\pi/2$）

x、v、a 之间的相位的关系



- v 比 x 超前$\pi/2$，a 比 x 超前π 或a 与x反相。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

初位相：

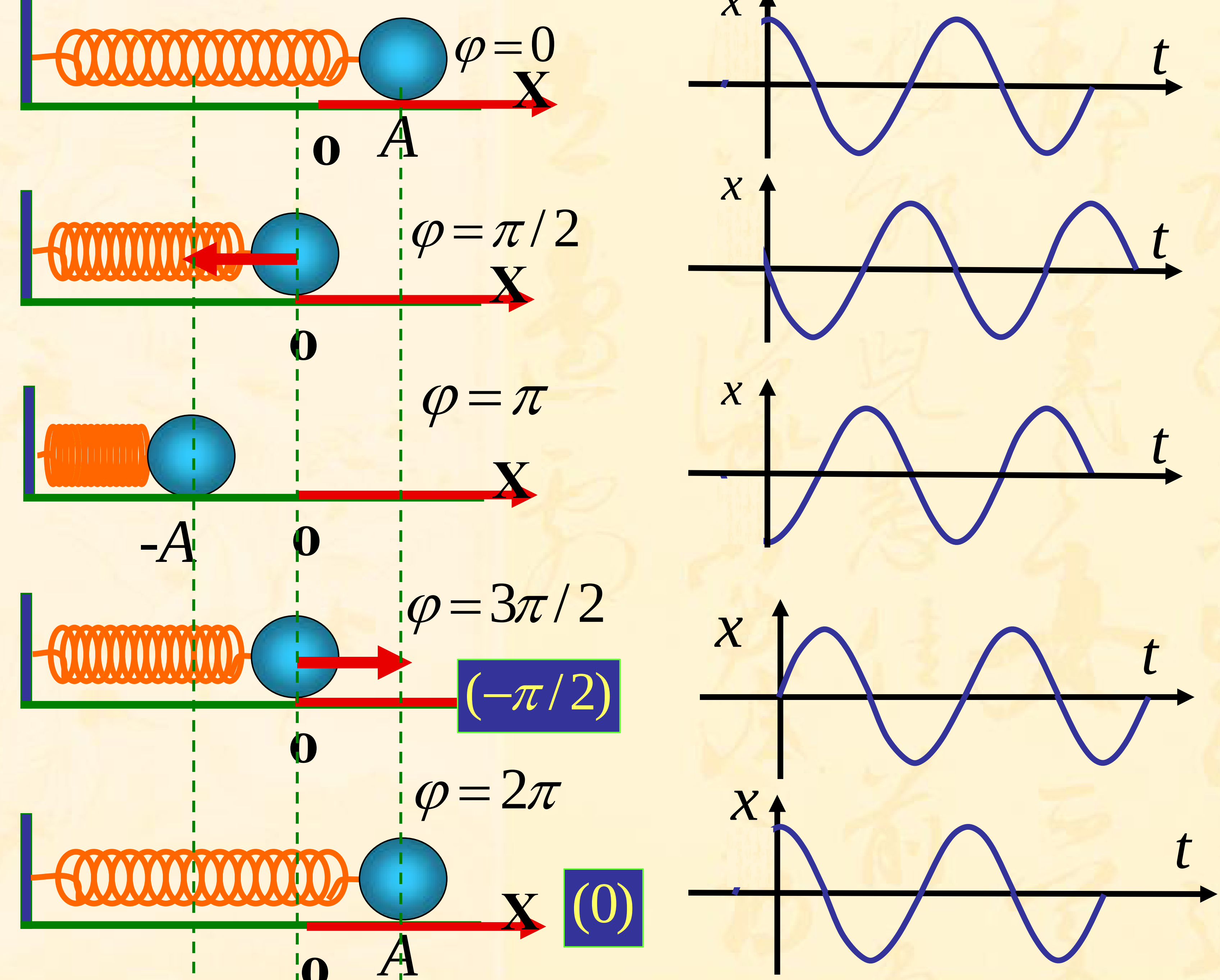
- $t=0$ 时，$\omega t+\varphi=\varphi$。 φ 称为初位相。
- 振幅 A 和初位相 φ 可由初始条件决定。

设 $t=0$: $x=x_0, v=v_0,$

则 $x_0 = A\cos\varphi,\ v_0 = -\omega A\sin\varphi$

所以 $\boxed{A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$ $\boxed{\varphi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$

确定初位相的基本规律：



$\varphi=0$
X
o
A
$\varphi=\pi/2$
X
o
$\varphi=\pi$
X
-A
o
$\varphi=3\pi/2$
$(-\pi/2)$
o
$\varphi=2\pi$
X
(0)
o
A
x
t

例：一谐振动 x_0= 0.707cm，v_0= 7.07cm/s， ω=10/s，求初相φ。

解：$$\varphi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})=\arctan(-\frac{7.07}{10\times 0.707})$$

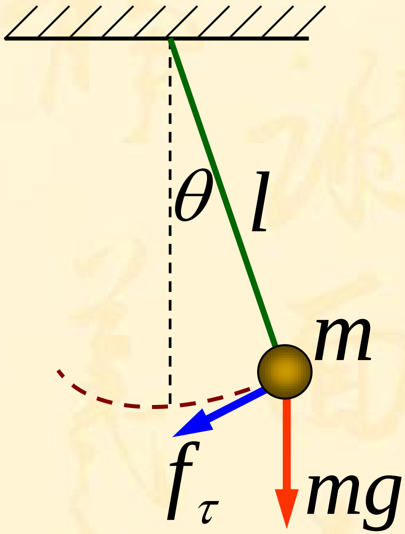
$$\varphi=\arctan(-1)=-45^\circ \text{或 } 135^\circ$$

确定初位相：

$$x_0=A\cos\varphi \qquad v_0=-A\omega\sin\varphi$$

而 $v_0>0$，$\qquad \therefore \varphi=-45^\circ(315^\circ)$

例：确定单摆固有角频率ω及周期T。



解：重力的切向分量 $f_\tau = -mg\sin\theta$

切向加速度 $a_\tau = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

所以 $-mg\sin\theta = ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

θ很小，$\sin\theta \approx \theta$，所以 $-mg\theta = ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

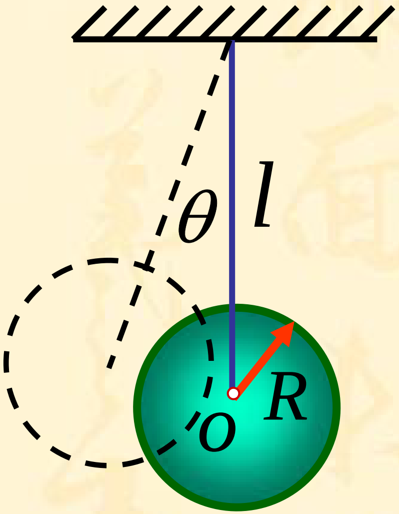
角谐振动

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

解：$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$

例：球体半径R，用一轻的细线悬挂，球心至悬挂点距离 l，求这球作小角摆动时的周期。

解：球对与球心距离为 l 的轴的转动惯量



$$I = I_0 + ml^2 = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2$$

球受重力矩 $M = -mgl\sin\theta$

θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$。由转动定理得

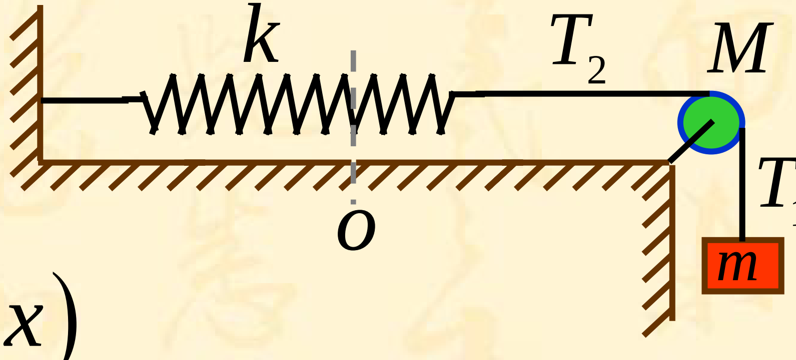
$$-mgl\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2R^2/5l^2\right)}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l(1+2R^2/5l^2)}{g}}}$$

例：如图所示装置，轻弹簧k=50N/m，滑轮M=1kg，半径R=0.2m，物体m=1.5kg。若将物体由平衡位置向上托起0.15m后突然放手，证明物体作简谐振动，并写出振动方程。

解：在平衡位置 o 处有



$$mg - kx_0 = 0$$

自此离o点 x 处时 $T_2 = k(x_0 + x)$

m：$mg - T_1 = ma$　　M：$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}MR^2\beta$

$(a = R\beta)$

解方程得 $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + (1/2)m}x = 0$$

简谐振动

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+(1/2)m}}=5/\mathrm{s} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=1.26\mathrm{s}$$

初始条件 $t=0$ ，$x_0=-0.15\mathrm{m}$，$v_0=0$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\left|x_0\right|=0.15\mathrm{m}$$

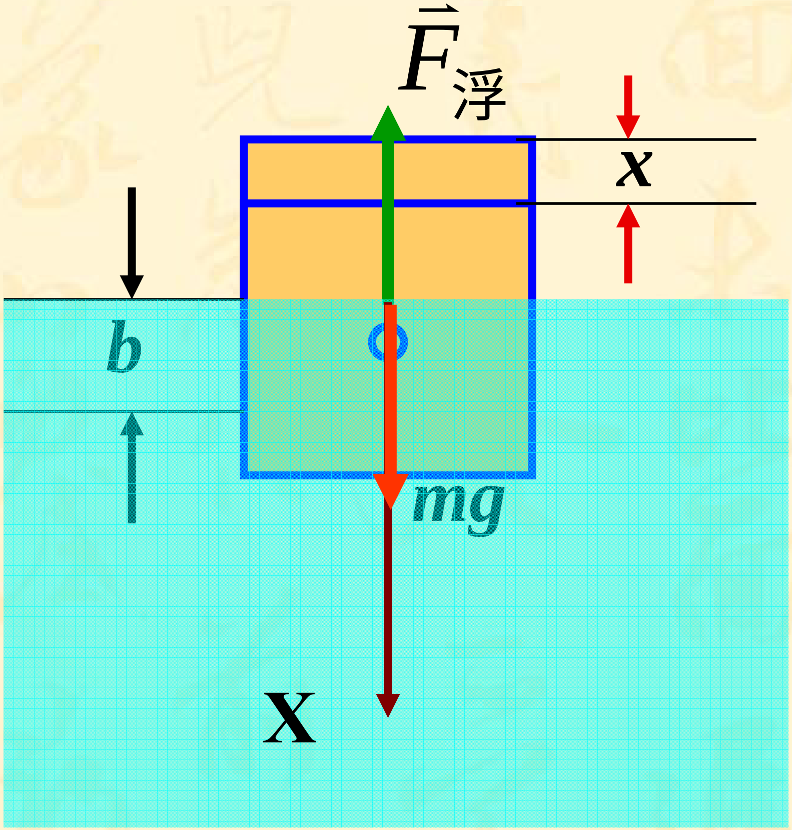
$$\because x_0=A\cos\varphi=-A, \therefore \cos\varphi=-1 \quad \varphi=\pi$$

振动方程 $x=A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$

即 $\boxed{x=0.15\cos\left(5t+\pi\right)\ (\mathrm{m})}$

例：边长l的立方体木块浮于静水中，浸入水中部分的高度为b。今用手将木块压下去，放手让其开始运动。忽略水的阻力，且水面高度不因木块运动而变化，证明木块作谐振动。

解：以水面为原点建立坐标OX。



平衡时 $mg = \rho_{水} b l^2 g$

任意时刻：

$$F_{浮} = \rho_{水}(b+x)l^2 g$$

$$mg - F_{浮} = ma$$

$$\therefore \rho_{水} b l^2 g - \rho_{水} l^2 (b+x) g = ma$$

$$mg = \rho_{水} b l^2 g$$

$$-\rho_{水} l^2 g x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho_{水} l^2 g}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{b} x = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{b}}$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

（谐振动）

五、简谐振动的能量

振动动能 $$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

振动势能 $$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

振动总能

$$\boxed{E = E_K + E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2}$$

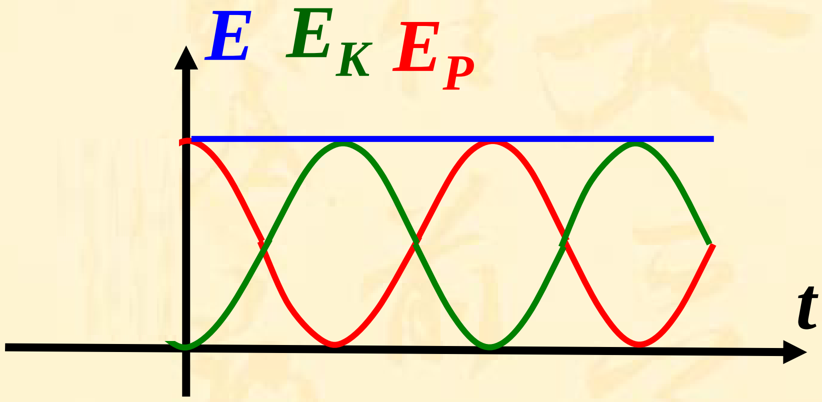
讨论：

- 振动动能和势能均随时间作周期性变化，周期均为$T/2$，取值范围：

$$0\sim\frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right)$$

- 动能与势能的位相相反，动能最大时，势能为零；势能最大时，动能为零。

- 振动总能量不随时间变化。



◎若某振动系统的机械能守恒，则该运动必为简谐振动：

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

$\boldsymbol{E=const}$

等式两边对*t*求导：$mv\dfrac{dv}{dt}+kx\dfrac{dx}{dt}=0$

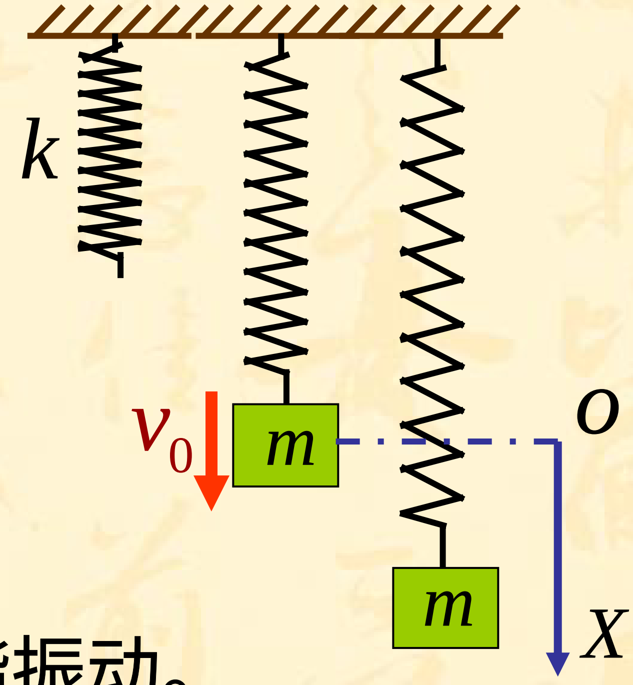
即 $mv\dfrac{d^2x}{dt^2}+kxv=0$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

课堂练习

例：轻弹簧下端挂一重物时伸长l=9.8cm。若给物体一向下的瞬时冲力，使它具有1m/s的向下速度，它就上下振动起来。试证明物体作简谐振动，并写出振动方程式。

解：取物体的平衡位置为原点o，则 $mg-kl=0$



当物体运动至某点x时，有

$$mg-k\left(x+l\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

即 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ 物体作简谐振动。

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/l} = 10(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

初始条件：$t = 0$：$x_0 = 0$，$v_0 = 1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = \sqrt{0 + (1/10)^2} = 0.1\mathrm{m}$$

$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} = -\frac{1}{10\times 0} = \pm\infty \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0 \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

振动方程为 $x = 0.1\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{m}$