



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第一章 随机过程



1.1 随机过程的定义

- 自然界中的事物变化过程可以分成两大类
 - 确知过程：具有确定的变化规律；每次试验所得的变化过程相同，都是时间 t 的同一个函数
 - 随机过程：没有确定的变化规律；每次试验所得的变化过程不同，是时间 t 的不同函数
- 电信号是电压或电流随时间变化的过程，它就是据此分成两类——确知信号和随机信号。下面先来看两个例子。





正弦（型）确知信号

- 正弦（型）确知信号

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

式中：振幅、角频率和相位都是已知的常量。

举例：对高频振荡器作定相激励





正弦（型）随机初相信号

- 正弦（型）随机初相信号

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

式中：振幅 A 和角频率 ω_0 都是常量，而相位 φ 是在区间 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。

- 由于相位 φ 是连续随机变量，在区间 $(0, 2\pi)$ 上有无数多个取值，即可取中的任一值 φ_i ，这时相应有不同的函数式：

$$x_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \quad \varphi_i \in (0, 2\pi)$$





- 可见正弦（型）随机初相信号实际上表示一族不同的时间函数，见右图所示（图中只画出其中的三条函数曲线）。因此这种信号是随机过程。

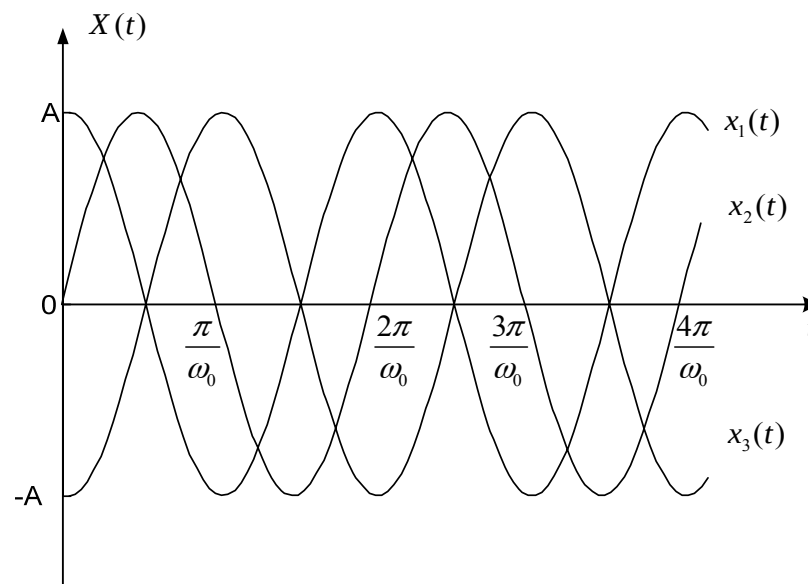


图1.1-1 正弦（型）随机初相信号

举例：对没有采用定相措施的一般高频振荡器作开机激励





在信号

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

的式中，

若仅振幅是随机变量，则为随机振幅信号。

若仅角频率是随机变量，则为随机频率信号。





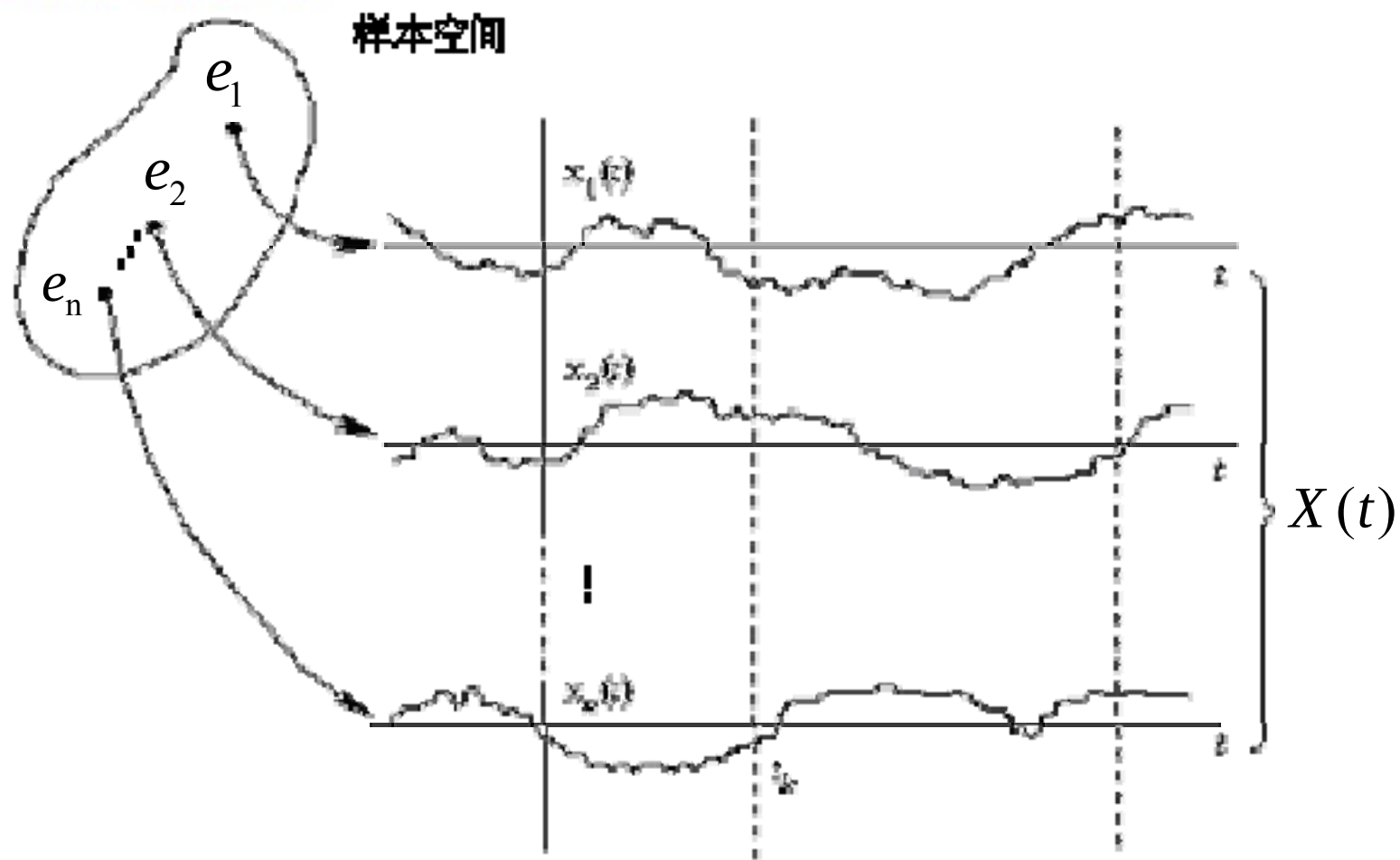
- 上例对每次开机作观测，都相当于作一次随机试验。每次试验所得的观测、记录结果 $x_i(t)$ 都是一个确定的时间函数，称为样本函数，简称样本或实现。所有这些样本函数的总体或集合就构成随机过程 $X(t)$ 。





- **定义1.1-1:** 设随机试验的样本空间 $S = \{e\}$, 对其每个元素 e , 依照某个规则确定出一个样本函数 $X(e,t)$, 由全部元素 e 所确定的一族样本函数 $X(e,t)$ 称为随机过程。通常按惯例省写随机因素 e , 把 $X(e,t)$ 简记为 $X(t)$ 。
- 这种定义是把随机过程理解为以随机方式（具有一定概率）选取某个特定的样本函数。





随机过程波形





下面我们来看随机过程 $X(e,t)$ 在各种情况下的意义：

- 若 e 固定为 e_i ，仅时间 t 变化，则得一个特定的时间函数 $X(e_i,t)$ ，它是一个确定的样本函数，即某次观测所得的记录曲线（实现）。





- 若 t 固定为 t_j ，仅随机因素 e 变化，则 $x(e, t_j)$ 蜕化为一个随机变量，简记为 $x(t_j)$ 。随机变量 $x(t_j)$ 又称为随机过程 $x(t)$ 在 $t = t_j$ 时的状态。
- 若 e 固定为 e_i ，且 t 固定为 t_j ，则 $x(e_i, t_j)$ 为一个确定值，简记为 $x_i(t_j)$ 。
- 若 e 和 t 均为变量，则 $\{x(e, t)\}$ 为所有样本的集合或所有随机变量的总体。这才是随机过程 $x(t)$ 。





- **定义1.1-2:** 若对于每个固定的时刻 t_j ($j=1,2,\dots$), $X(t_j)$ 都是随机变量, 则称 $X(t)$ 为随机过程。
- 这种定义是把随机过程理解为随时间而变化的—族随机变量。





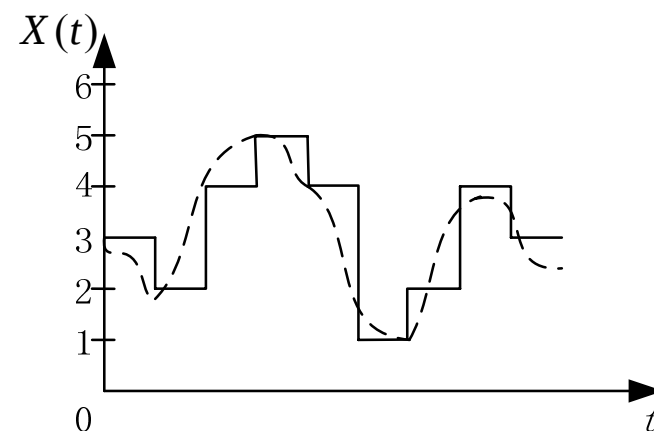
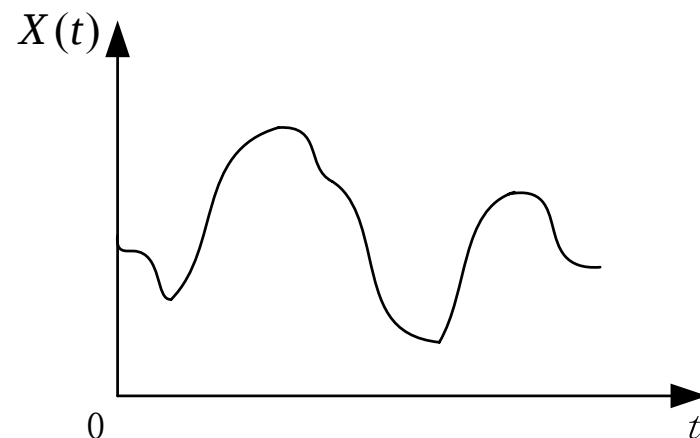
随机过程的分类

- 随机过程可以按其状态的不同，分成连续型和离散型。也可以按其时间参量 t 的不同，分成连续参量随机过程（简称随机过程）和离散参量随机过程（简称随机序列）。



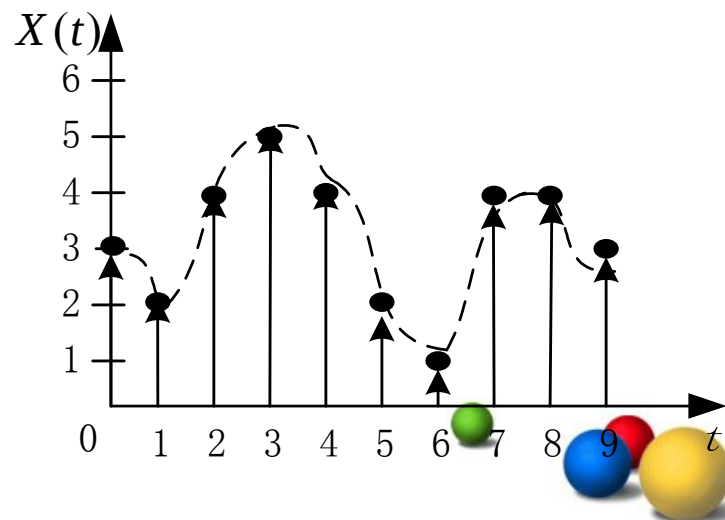
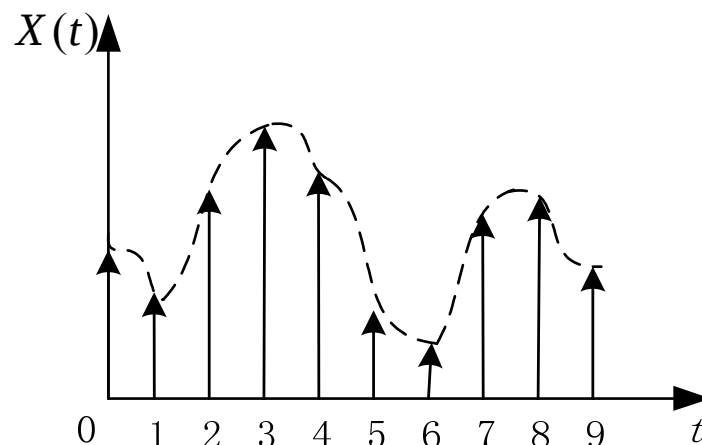


- 连续型随机过程：其状态 $X(t)$ 和时间 t 都连续。
- 离散型随机过程：其状态 $X(t)$ 离散，而时间 t 连续。如图所示。对连续型随机过程进行随机取样，并经量化后保持各取样值，即得这类随机过程。





- **连续随机序列：**其状态连续，而时间离散。对连续型随机过程进行等间隔取样，即得这类随机过程。
- **离散随机序列：**其状态和时间都离散。对连续型随机过程进行等间隔取样，并将取样值量化成若干个固定的离散值，例如二进制中的0、1，或十进制中的0~9，即得这类随机过程，实际上即为数字序列或数字信号。





- 由上可知，最基本的是连续型随机过程，其它三类只是对它作离散处理而得，因此本书重点介绍连续型随机过程。





- 随机过程根据其分布函数或概率密度进行分类，可以分成独立随机过程、马尔可夫（**Markov**）过程，独立增量过程、正态（**Normal**）随机过程、瑞利（**Rayleigh**）随机过程等。
- 根据随机过程的功率谱特性，可以分成宽带的或窄带的，白色的或有色的。
- 在工程技术中，还可根据随机过程有无平稳性，分成平稳的和非平稳的。





1.2 随机过程的概率分布

■ 一维概率分布

随机过程 $X(t)$ 在任一特定时刻 t_1 取值为一维随机变量 $X(t_1)$ 。概率 $P\{X(t_1) \leq x_1\}$ 是取值 x_1 和时刻 t_1 的函数，记：

$$F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

称为过程 $X(t)$ 的一维分布函数。





- 若它对 x_1 的一阶偏导数存在，则定义：

$$p_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

为过程 $X(t)$ 的一维概率密度，一般省写其脚注而简记为 $p(x, t)$ 。





1. 2. 2 二维概率分布

- 随机过程 $X(t)$ 在任两时刻 t_1 、 t_2 的取值 $X(t_1)$ 、 $X(t_2)$ 构成二维随机变量 $[X(t_1), X(t_2)]$ 。记：

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

称为过程 $X(t)$ 的二维分布函数。

- 若它对 x_1 和 x_2 的二阶混合偏导数存在，则定义：

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

为过程 $X(t)$ 的二维概率密度。





二维概率分布可以描述随机过程在任两时刻取值之间的关联性，且通过积分可以求得两个一维概率密度 $p(x_1, t_1)$ 和 $p(x_2, t_2)$ 。





1. 2. 3 n 维概率分布

随机过程 $X(t)$ 在任意 n 个时刻 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的取值 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 构成 n 维随机变量，即 n 维空间中的随机矢量 $\mathbf{x}$ 。同上可得过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数为：

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned}$$

过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度为：

$$\begin{aligned} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \end{aligned}$$





根据第0章中多维随机变量的概率分布可知，随机过程的 n 维概率分布具有下列主要性质：

$$F_n(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n) = 0$$

$$F_n(\infty, \infty, \dots, \infty; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1$$

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$$

n 重





$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n$$

(n-m)重

$$= p_m(x_1, x_2, \cdots, x_m; t_1, t_2, \cdots, t_m)$$

若 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ 统计独立, 则得:

$$p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= p(x_1, t_1) p(x_2, t_2) \cdots p(x_n, t_n)$$





- **例1. 1—3:** 设随机振幅信号 $X(t) = X \cos \omega_0 t$,
式中: ω_0 为常量, X 为标准正态随机变量。
试求时刻: $t = 0$ 、 $t = \pi/3\omega_0$ 、 $t = \pi/2\omega_0$ 时的一维概率密度。

解: 标准正态随机变量 X 的一维概率密度为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad -\infty < x < \infty$$

$X(t)$ 在任一时刻 t 的取值为 $x_t = X \cos \omega_0 t$

由随机变量的概率密度变换, 可以求得 $X(t)$ 的一维概率密度为:

$$p(x_t, t) = p(x, t) \left| \frac{dx}{dx_t} \right|$$





$$\begin{aligned} p(x_t, t) &= p(x, t) \left| \frac{dx}{dx_t} \right| \\ &= p\left(\frac{x_t}{\cos \omega_0 t}, t\right) \left| \frac{1}{\cos \omega_0 t} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\cos \omega_0 t|} \exp\left[-\frac{x_t^2}{2 \cos^2 \omega_0 t}\right] \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$





$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\cos \omega_0 t|} \exp \left[-\frac{x_t^2}{2 \cos^2 \omega_0 t} \right] \quad -\infty < x < \infty$$

■ 故得：

■ $t = t_1 = 0$ 时

$$p(x_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x_1^2}{2} \right]$$

■ $t = t_2 = \frac{\pi}{3\omega_0}$ 时

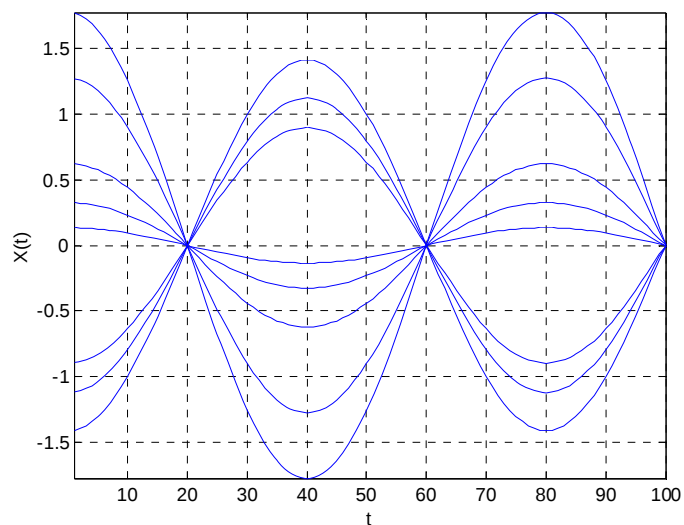
$$p(x_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 0.5} \exp \left[-2x_2^2 \right]$$

■ $t = t_3 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ 时

$$p(x_3, t_3) = \lim_{t \rightarrow t_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\cos \omega_0 t_3|} \exp \left[-\frac{x_3^2}{2 \cos^2 \omega_0 t_3} \right] = \delta(x_3)$$

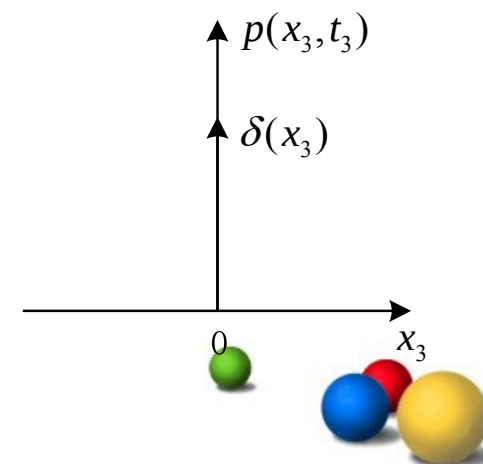
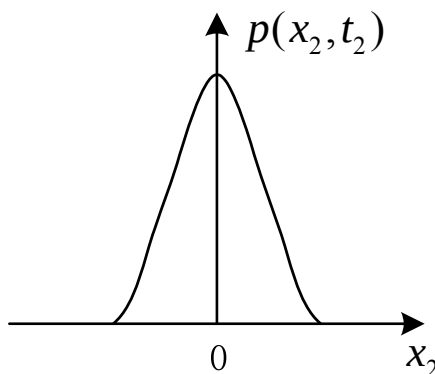
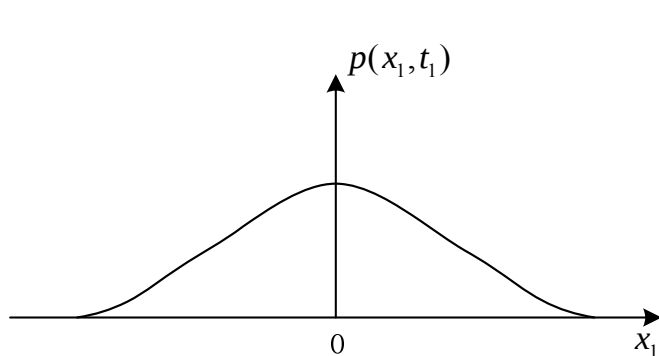
■ 上述结果示于下图。由图可知，随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度随时间 t 变化，任一时刻的取值都是正态分布，但各个时刻的方差有所不同。





(a) 随机振幅信号的八条样本曲线

```
clc;clear;  
A = randn(1,8);  
for k = 1:8  
    for t = 1:100  
        x(k,t) = A(k)*cos(0.025*pi*t);  
    end  
    plot(x(k,:));  
    hold on;  
end  
xlabel('t');ylabel('X(t)');  
grid on;axis tight;  
title('随机振幅信号的八条样本曲线');
```





- 例1.1-4: 试写出确知信号 $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ 的一维概率密度。

- 解: 从分类来说, 确知信号 $s(t)$ 不是随机过程, 但可看成是一种特殊的随机过程 $X(t)$, 对于任一时刻 t , 过程 $X(t)$ 的取值只能是 $s(t)$, 因而确知信号 $s(t)$ 的一维概率密度可以写为:

$$p(x, t) = \delta[x - s(t)]$$





1. 3随机过程的矩函数

- 描述随机变量的平均统计参量是数学期望、方差、协方差、相关矩等数字特征，最一般的数字特征为矩。





1. 3. 1数学期望

- 随机过程 $X(t)$ 在某一特定时刻 t_1 的取值为一维随机变量 $x(t_1)$ ，其数学期望是一个确定值。随机过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的取值仍为一维随机变量 $x(t)$ （注意此处 t 已固定，故 $X(t)$ 已非随机过程），将其任一取值 $x(t)$ 简记为 x ，根据随机变量的数学期望定义，可得：

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx = m_x(t)$$



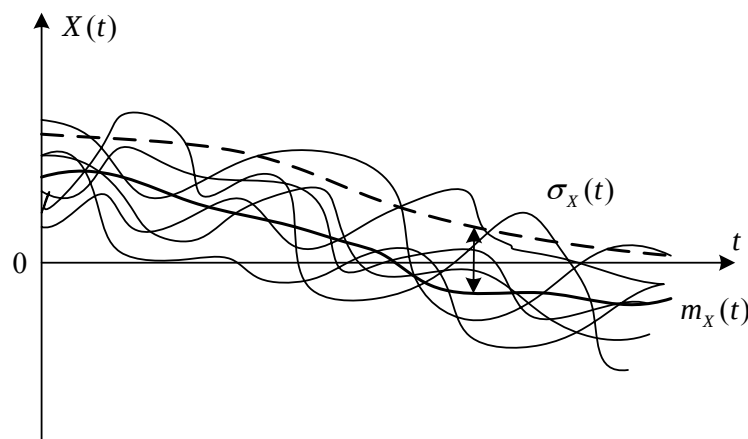


- 它是时间 t 的确定函数，是过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的数学期望或统计平均，称为随机过程 $X(t)$ 的（瞬时）数学期望或统计均值，常以专用符号 $m_X(t)$ 记之（脚注 X 在不致混淆时可以省去不写）。





- 统计均值是对随机过程 $X(t)$ 中的所有样本在任一时刻 t 的取值进行平均，因而统计均值又称集合均值（在不致混淆时可以简称均值）。
- 随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $m_X(t)$ 见图中的粗实线所示，它表示随机过程中的所有样本在任一时刻的取值（随机变量）之分布中心。





1. 3. 2方差

- 随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $m_X(t)$ 是确定的时间函数，因而 $\tilde{X}(t) = X(t) - m_X(t)$ 仍为随机过程，称为中心化随机过程，简称为过程 $X(t)$ 的起伏。
- 起伏在任一时刻的取值仍为一维随机变量，故按随机变量的方差定义，可得：

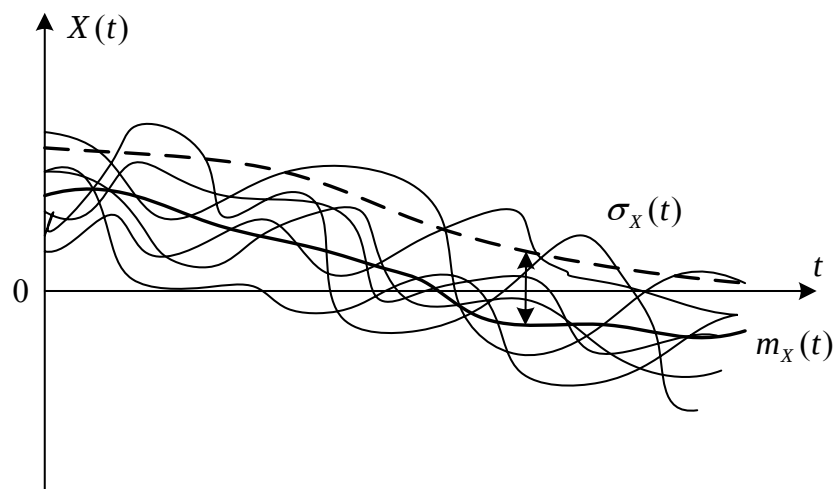
$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E \left\{ \left[\tilde{X}(t) \right]^2 \right\} = E \left\{ [X(t) - m_X(t)]^2 \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 p(x, t) dx = \sigma_X^2(t) \end{aligned}$$

- 它也是时间 t 的确定函数，称为随机过程 $X(t)$ 的方差，常以专用符号 $\sigma_X^2(t)$ 记之。





- 方差必为非负函数，其平方根 $\sigma_X(t)$ 称为随机过程的标准差或方差根。在图中以虚线表示。
- 方差表示随机过程中的所有样本在任一时刻的取值（随机变量）对其分布中心的平均离散程度。





1. 3. 3 自相关函数

- 为了表示随机过程在任两时刻的取值之间的关联程度，需用二维随机变量的二阶原点矩或中心矩，这就是随机过程的自相关函数和中心化自相关函数。





- 随机过程 $X(t)$ 在任两时刻 t_1, t_2 的取值构成二维随机变量，将变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 在任两时刻的取值 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 简记为 x_1 和 x_2 ，记二阶混合原点矩为：

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的自相关函数，在不致混淆时可以简称相关函数。它表示过程 $X(t)$ 在任两时刻的取值之间的平均关联程度。





- 同理，记变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶混合中心矩为：

$$C_X(t_1, t_2) = E[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)] p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

称为随机过程 $X(t)$ 的中心化自相关函数或自协方差函数，简称协方差函数。它表示过程 $X(t)$ 在任两时刻的起伏值之间的平均关联程度。





- 这两种自相关函数之间具有下述关系：

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\&= E\{X(t_1)X(t_2) - m_X(t_1)X(t_2) - m_X(t_2)X(t_1) + m_X(t_1)m_X(t_2)\} \\&= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)\end{aligned}$$

因为当 $t_1 = t_2 = t$ 时，有：

$$\begin{aligned}R_X(t, t) &= E[X(t)X(t)] = E[X^2(t)] \\C_X(t, t) &= E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = \sigma_X^2(t)\end{aligned}$$





- 因此，可得：

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] - m_X^2(t)$$

- 可见当 $t_1 = t_2 = t$ 时，自协方差函数即方差，而相关函数即一维随机变量的二阶原点矩 $E[X^2(t)]$ ，称为随机过程 $X(t)$ 的均方值。





- **例1. 1—5:** 设随机振幅信号 $X(t) = X \cos \omega_0 t$
式中: ω_0 为常量, X 为标准正态随机变量。
求随机过程 $X(t)$ 的数学期望、方差、相关函数、协方差函数。
- **解:** 因为 X 是标准正态随机变量, 故其数学期望 $E[X] = 0$, 方差 $D[X] = 1$, 从而均方值

$$E[X^2] = D[X] + E^2[X] = 1$$





- 根据随机过程的矩函数定义，并利用数字特征的性质，求得：

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[X \cos \omega_0 t] = \cos \omega_0 t \cdot E[X] = 0$$

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = D[X \cos \omega_0 t] = \cos^2 \omega_0 t \cdot D[X] = \cos^2 \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[X^2 \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2] \\ &= \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 \cdot E[X^2] = \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= E\{X(t_1)X(t_2)\} = R_X(t_1, t_2) = \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 \end{aligned}$$





1. 4随机过程的特征函数

- 我们知道，随机变量的概率密度与特征函数是一对傅立叶（Fourier）变换，且随机变量的矩唯一地被特征函数所确定。因此求正态分布等随机变量的概率密度和数字特征时，利用特征函数可以显著简化运算。同样，求随机过程的概率密度和矩函数时，利用特征函数也是如此。





- 随机过程 $X(t)$ 的一维特征函数被定义为:

$$\Phi_X(\lambda, t) = E[e^{j\lambda X(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} p(x, t) dx$$

式中 x 为随机变量 $X(t)$ 的取值, $p(x, t)$ 是过程 $X(t)$ 的一维概率密度, 它与一维特征函数 $\Phi_X(\lambda, t)$ 构成一对傅立叶变换, 即有:

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\lambda, t) e^{-j\lambda x} d\lambda$$





- 将上式两端各对变量 λ 求偏导 n 次，得：

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \Phi_X(\lambda, t) = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{j\lambda x} p(x, t) dx$$

- 因而过程 $X(t)$ 的 n 阶原点矩函数为：

$$E[X^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x, t) dx = j^{-n} \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \Phi_X(\lambda, t) \right]_{\lambda=0}$$

- 利用该式即可以求得随机过程的数学期望和均方值。





- 随机过程的二维特征函数被定义为:

$$\begin{aligned}\Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) &= E[e^{j\lambda_1 X(t_1) + j\lambda_2 X(t_2)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda_1 x_1 + j\lambda_2 x_2} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

- 式中: $x_1 = X(t_1)$, $x_2 = X(t_2)$, $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是过程的二维概率密度, 它与 $\Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)$ 构成二重傅立叶变换对, 即有:

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) e^{-j\lambda_1 x_1 - j\lambda_2 x_2} d\lambda_1 d\lambda_2$$





- 将上式的两端各对变量 λ_1 和 λ_2 求一次偏导，得：

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 e^{j\lambda_1 x_1 + j\lambda_2 x_2} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- 因而过程 $X(t)$ 的相关函数为：

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) \right]_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$$





- 利用特征函数的性质，还可求得过程 $X(t)$ 的方差和协方差函数分别为：

$$D[X(t)] = - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{-j\lambda E[X(t)]} \Phi_X(\lambda, t) \right\}_{\lambda=0}$$

$$C_X(t_1, t_2) = - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} e^{-j\lambda_1 E[X(t_1)] - j\lambda_2 E[X(t_2)]} \Phi_X(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) \right\}_{\lambda_1=\lambda_2=0}$$





- **例1. 1—6:** 已知随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的取值服从正态分布, 其一维概率密度为:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

试求这时随机过程 $X(t)$ 的特征函数, 并求此时的数学期望、方差、均方值。

- **解:** 由一维特征函数的定义式可得:

$$\begin{aligned}\Phi_X(\lambda, t) &= E[e^{j\lambda X(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} p(x, t) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\lambda x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx\end{aligned}$$





- 作变量代换： $y = \frac{x-m}{\sigma}$ ， 得：

$$\Phi_X(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2} + j\lambda\sigma y\right] dy = \exp\left[j\lambda m - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right]$$

- 可以求得数学期望和均方值分别为：

$$E[X(t)] = j^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_X(\lambda, t) \right]_{\lambda=0} = m$$

$$E[X^2(t)] = j^{-2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Phi_X(\lambda, t) \right]_{\lambda=0} = \sigma^2 + m^2$$

- 因而方差为： $D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = \sigma^2$





1. 平稳随机过程 特点

- 平稳随机过程的主要特点是其统计特性不随时间的平移而变化，即其概率分布或矩函数与观察的计时起点无关，可以任意选择观测的计时起点。
- 若随机过程不具有上述平稳性，则为非平稳随机过程。





分类

- 根据对平稳性条件的要求程度不同，一般把平稳随机过程分成两类：
严格平稳（又称狭义平稳）；
广义平稳（又称宽平稳）。





严格平稳过程

- 若随机过程 $X(t)$ 的任意 n 维概率分布不随计时起点的选择不同而变化，即当时间平移任一常数 ε 时，其 n 维概率密度（或分布函数）不变化，则称 $X(t)$ 为严格平稳过程，即应满足下述关系式：

$$\begin{aligned} & p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &= p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \cdots, t_n + \varepsilon) \end{aligned}$$





- 下面来看严格平稳过程的一、二维概率密度和矩函数有什么特点。

将上式用于一维时，令 $\varepsilon = -t_1$ ，则得：

$$p_1(x_1, t_1) = p_1(x_1, 0)$$

这表明一维概率密度与时间t无关，故可简记为 $p(t)$ 。
可得数学期望和方差也都是与时间无关的常量，即有：

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m_x$$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 p(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2 p(x)dx = \sigma_x^2$$





用于二维时，令 $\varepsilon = -t_1$ ，并记 $\tau = t_2 - t_1$ ，得：

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; 0, \tau)$$

这表明二维概率密度仅与时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 有关，而与时刻 t_1 或 t_2 无关，故可简记为 $p_2(x_1, x_2; \tau)$ 。

- 由此可得相关函数仅为单变量 τ 的函数，即：

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$$





- 同理可得协方差函数：

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$$

- 故当 $t_1 = t_2 = t$ ，即 $\tau = 0$ 时，有：

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - m_X^2$$





广义平稳过程

- 若随机过程 $X(t)$ 的数学期望是与时间 t 无关的常量，相关函数仅与时刻间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 有关，即：

$$\left. \begin{aligned} E[X(t)] &= m_X \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(\tau) \end{aligned} \right\}$$

则称 $X(t)$ 为广义平稳过程。





- **例1:** 设随机初相信号 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, 其中 A 和 ω_0 都是常量, φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。试问 $X(t)$ 是否为平稳过程。

解: 随机变量 φ 的概率密度为:

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 < \varphi < 2\pi \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

因对任一时刻 t , $X(t)$ 都是同一随机变量 φ 的函数, 故可对此函数求统计均值, 得数学期望为:





$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0 \end{aligned}$$

- 同理，变量 $X(t_1)X(t_2)$ 也是同一随机变量 φ 的函数，故得相关函数为：

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)p(\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} A^2 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \omega_0(t_2 - t_1) + \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi] \right\} d\varphi \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$





- 因为求得的数学期望与时间无关，相关函数仅与时间间隔有关，故知 $X(t)$ 至少是广义平稳过程。
- 仿上方法可知，随机振幅信号 $X(t) = X \cos \omega_0 t$ 不是平稳过程。而振幅与相位不相关的随机振幅、初相信号 $X(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 则是平稳过程。





2、各态历经过程

- 随机过程 $x(e, t)$ 有两个变量，故能采用两种平均方法——统计平均和时间平均。下面先介绍这两种平均方法。





统计平均

- 对集合中的所有样本在同一（或同一些）时刻的取值用统计方法求其平均，称为统计平均或集合平均，记为 $E[\cdot]$ 或 $\overline{\cdot}$ 。

例如，对于平稳过程 $X(t)$ ，其集合均值为：

$$E(X(t)) = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m_X$$





- 其集合相关函数为：

$$R_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$$

- 用上两式求统计平均时，首先需要取得过程 $X(t)$ 的一族个样本（理论上需要 $n \rightarrow \infty$ ），然后将同一时刻或同两时刻的取值，用统计方法求出一、二维概率密度，才能利用上两式作计算。
- 可见这样求解非常繁难。通常的作法是先经过实验，取得数量相当多的有限个样本，然后求其算术均值，并近似将它当作统计均值。





- 例如当精度要求不高时，可以采用下列近似算式：

$$m_X(t) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

$$R_X(t, t+\tau) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)x_i(t+\tau)$$

式中：n为样本总数。

- 思考替代方法





时间平均

- 对集合中的某个特定样本在各个时刻的值，用一般数学方法求其平均，称为时间平均，记为 $\langle \cdot \rangle$ 。
- 据此可以定义某一样本 $x_i(t)$ 的时间均值为：

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t) dt$$





- 而样本 $x_i(t)$ 的时间自相关函数为：

$$\langle x_i(t)x_i(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t)x_i(t+\tau)dt$$

- 可见，求时间平均只需有一个样本，对这确定的时间函数，可用一般数学方法作计算，即使时间函数复杂难算，还可用积分平均器来作测量（应该保持测试条件不变）。
- 理论上需要平均时间 $T \rightarrow \infty$ ，即样本应该持续无限长，但实际上只需足够长，能够满足工程上的一定精度要求（估计方差足够小）即可。





- **例2:** 设 $x_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_i)$ 是例1所示随机初相信号 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 中的任一样本, 试求 $x_i(t)$ 的时间均值和时间自相关函数, 并与该例所得结果作比较。

- **解:**
$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A\cos(\omega_0 t + \varphi_i) dt$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A \cos \varphi_i}{2T} \int_{-T}^T \cos \omega_0 t dt \\ & &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A \cos \varphi_i \sin \omega_0 T}{\omega_0 T} = 0 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}\langle x_i(t) x_i(t+\tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_i] dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T [\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i + \omega_0 \tau) + \cos \omega_0 \tau] dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} (\sin 2\omega_0 T) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T \cos \omega_0 \tau dt \\&\approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T \cos \omega_0 \tau dt \\&= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau\end{aligned}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$





- 与例1所得结果作比较，可知有关系式：

$$E[x_i(t)] = \langle x_i(t) \rangle \quad E[x_i(t)x_i(t+\tau)] = \langle x_i(t)x_i(t+\tau) \rangle$$

- 可见对于这种随机初相信号，其任一样本的时间平均都等于集合的统计平均，故能允许用简易的时间平均来代替繁难的统计平均。





各态历经性

- 若由随机过程 $X(t)$ 的每个样本 $x_i(t)$ 求得的时间平均从概率意义上（概率1）等于集合的统计平均，或者确切些说，此时时间平均依概率（概率1）收敛于集合的统计平均，则称过程 $X(t)$ 具有各态历经性(Ergodicity)，简称遍历性。





■ 若有：

$$\langle X(t) \rangle \stackrel{P}{=} E[X(t)]$$

则称过程 $X(t)$ 的均值具有遍历性。式中等号上面的字母 P 表示是概率意义上的相等（概率1）。

■ 同理，若有：

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle \stackrel{P}{=} E[X(t)X(t+\tau)]$$

则称过程的相关函数具有遍历性。





- 若随机过程的均值和相关函数都具有遍历性，则称为广义各态历经过程，简称遍历过程。
- 各态历经性的物理意义是：随机过程的任一样本在足够长的时间内，都先后经历了这个随机过程的各种可能状态。
- 故对遍历过程来说，其任一样本都可作为有充分代表性的典型样本，对它求得的时间平均，也就从概率意义上等于集合的统计平均，从而可以简化计算或测量。





各态历经性的条件

- 平稳过程只是遍历过程的必要条件，并非充分条件。即有下面的关系式：

$$\{\text{遍历过程}\} \subset \{\text{平稳过程}\} \subset \{\text{随机过程}\}$$





下面来讨论遍历性的充要条件

- 平稳过程 $X(t)$ 的均值 m_X 具有遍历性的充要条件为:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) C_X(\tau) d\tau = 0$$

式中: $C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$ 为协方差函数。

证明略。





- 对于最常见的零均值平稳正态随机过程，可以证明过程遍历的充要条件为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |C_X(\alpha)|^2 d\alpha = 0$$

或即：

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$$

可见当 $C_X(\tau)$ 中含有周期性分量时，上两式将不成立。





- 由上可知，要严格检验一个随机过程的均值和相关函数是否具有遍历性，一般应该分别求得其二阶和四阶矩函数，这将非常繁难。
- 因而通常是先凭经验，把平稳过程假设为遍历过程，然后根据实验结果，对这种假设进行检验。应该指出，遍历性的条件要求比较宽，实际工程中遇见的平稳过程大多是遍历过程。





遍历过程矩函数的工程意义

- 当平稳过程 $X(t)$ 又是遍历过程时，其统计平均可用时间平均代替，因而各个矩函数可用相应的时间平均参量来作解释。例如当 $X(t)$ 表示电压（或电流）时，各个矩函数在工程上有如下意义：
- 因为集合均值可用时间均值代替，所以数学期望 m_x 表示过程 $X(t)$ 的直流电压（或电流）分量。而 m_x^2 表示过程 $X(t)$ 消耗在一欧姆电阻上的直流分量功率。





- 因为集合方差可用时间方差代替，所以集合方差 σ_X^2 表示过程 $X(t)$ 消耗在一欧姆电阻上的平均起伏功率（即交变功率）。而标准差 σ_X 表示起伏电压（或电流）的有效值。
- 当 $\tau = 0$ 时，集合相关函数 $R_X(0)$ 即集合均方值 $E\{X(t)^2\}$ ，可得：

$$R_X(0) = \sigma_X^2 + m_X^2$$

可见集合均方值表示过程 $X(t)$ 消耗在一欧姆电阻上的总平均功率，它是直流分量功率与平均起伏功率之和。





3相关函数的性质

- 平稳实随机过程的相关函数具有下列性质：

$$(1) \quad R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$

即相关函数是变量的偶函数，

$$\text{证：} \quad R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(-\tau)$$

同理，有：

$$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$





$$(2) \quad R_X(0) \geq 0$$

■ 即相关函数在 $\tau=0$ 时为非负值

证：当 $\tau=0$ 时，

$$R_X(0) = \sigma_X^2 + m_X^2 \geq 0$$

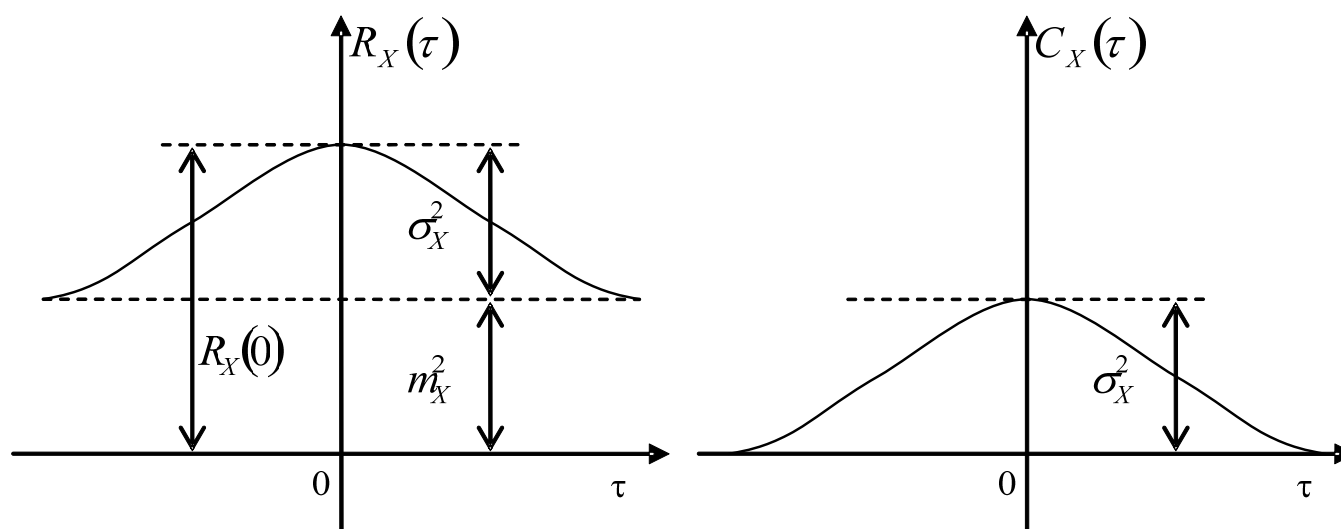
同理，有：

$$C_X(0) = \sigma_X^2 \geq 0$$





平稳随机过程的相关函数和协方差函数





- (3) $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$ 即相关函数在 $\tau=0$ 时具有最大值。
- 证：任何正函数的数学期望恒为非负值，故有：

$$E\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} \geq 0$$
$$E\{X^2(t) \pm 2X(t)X(t+\tau) + X^2(t+\tau)\} \geq 0$$

今过程平稳，有： $E[X^2(t)] = E[X^2(t+\tau)] = R_X(0)$

因而 $2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$

或 $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

- 同理，有：
 $C_X(0) \geq |C_X(\tau)|$





(4) 若平稳随机过程中不含周期分量，则有：

$$R_X(\infty) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X^2$$

- 证：对于这类随机过程，当 $|\tau|$ 增大时，变量 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间的关联程度便会减小。在 $|\tau| \rightarrow \infty$ 的极限情况下，两个随机变量将呈现独立性，故有：

$$\begin{aligned} \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) &= \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} E[X(t)] \cdot E[X(t+\tau)] = m_X^2 \end{aligned}$$

- 同理，不难求得：

$$C_X(\infty) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$$





- 对于这类随机过程，其均值和方差可用相关函数表示如下：

$$\left. \begin{aligned} m_X &= \pm \sqrt{R_X(\infty)} \\ \sigma_X^2 &= C_X(0) = R_X(0) - R_X(\infty) \end{aligned} \right\}$$





(5) 对于周期性随机过程，有：

$$R_X(\tau) = R_X(\tau + T)$$

即相关函数同样也具有周期性，且周期T仍然保持不变。

■ 证：周期性过程具有性质 $X(t) = X(t+T)$ ，故有：

$$R_X(t) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)X(t+\tau+T)] = R_X(\tau+T)$$

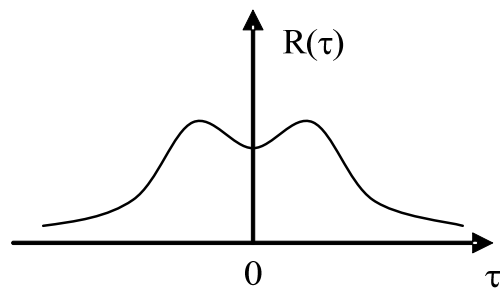
(6) $R_X(\tau)$ 为非负定函数，即对任意数组 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 和任意函数 $f(t)$ ，均有：

$$\sum_{i,j=1}^n R_X(t_i - t_j) f(t_i) f(t_j) \geq 0$$

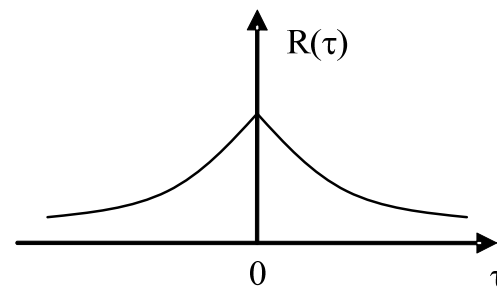




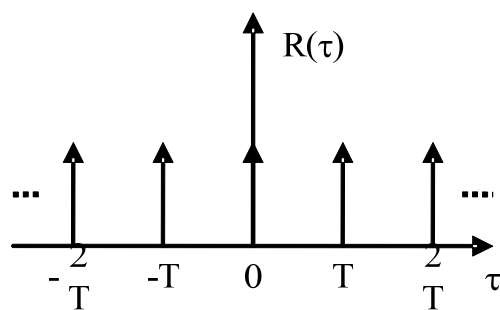
- **例1. 2—5:** 假设各个平稳随机过程的相关函数分别如图所示。试判断它们能否成立，并说明这些过程各有何特点（有无直流分量，有无周期性，波形起伏的快慢）。



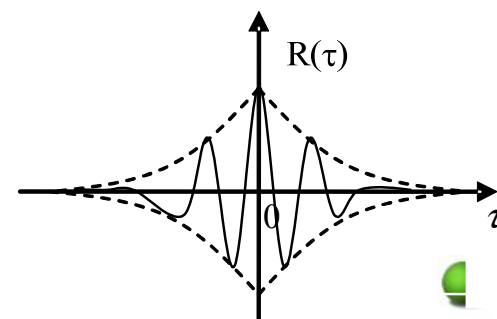
(a)



(b)



(c)



(d)



■ 解：

图（a）违反性质（3），故不能成立；

图（b）能成立，有直流分量，无周期性，过程的波形起伏较慢；

图（c）能成立，无直流分量，有周期性，过程的波形起伏极快（是宽度极窄的 δ 函数）。

图（d）能成立，无直流分量和周期性，过程的波形起伏较快（指其载波波形，而包络波形的起伏较慢），且正负交替地变化。





自相关系数

- 无量纲的比值

$$r_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)} = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2}$$

称为随机过程的自相关系数（又称归一化相关函数或标准协方差函数），简称相关系数。





互相关系数

若随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳，则定义它们的互相关系数为：

$$r_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

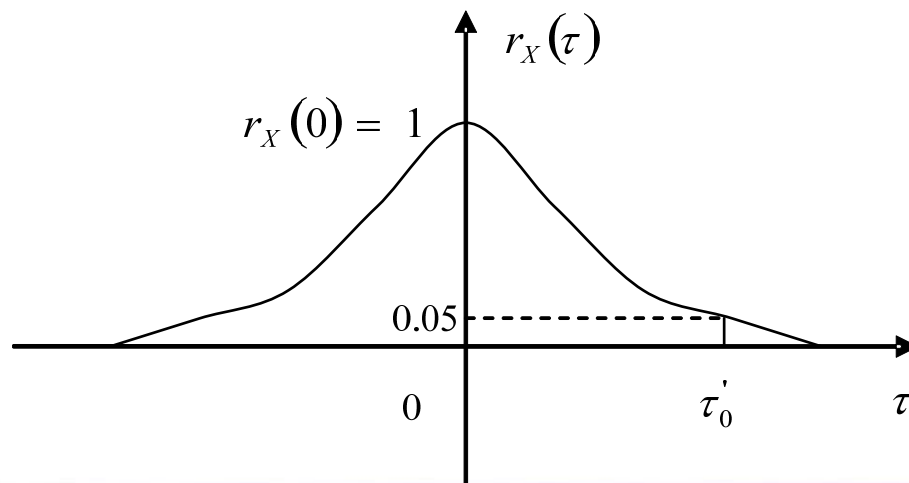
式中： σ_X 、 σ_Y 分别是两个随机过程的标准差。





相关时间---定义1

- 当相关系数 $r_X(\tau)$ 从其最大值 $r_X(\tau)=1$ 下降到某个近似的零值（一般取为0.05）所经历的时刻间隔称为相关时间，记为 τ_0' 。
- 当 $\tau \geq \tau_0'$ 时，就可认为 $\dot{X}(t)$ 与 $\dot{X}(t+\tau)$ 已不相关。

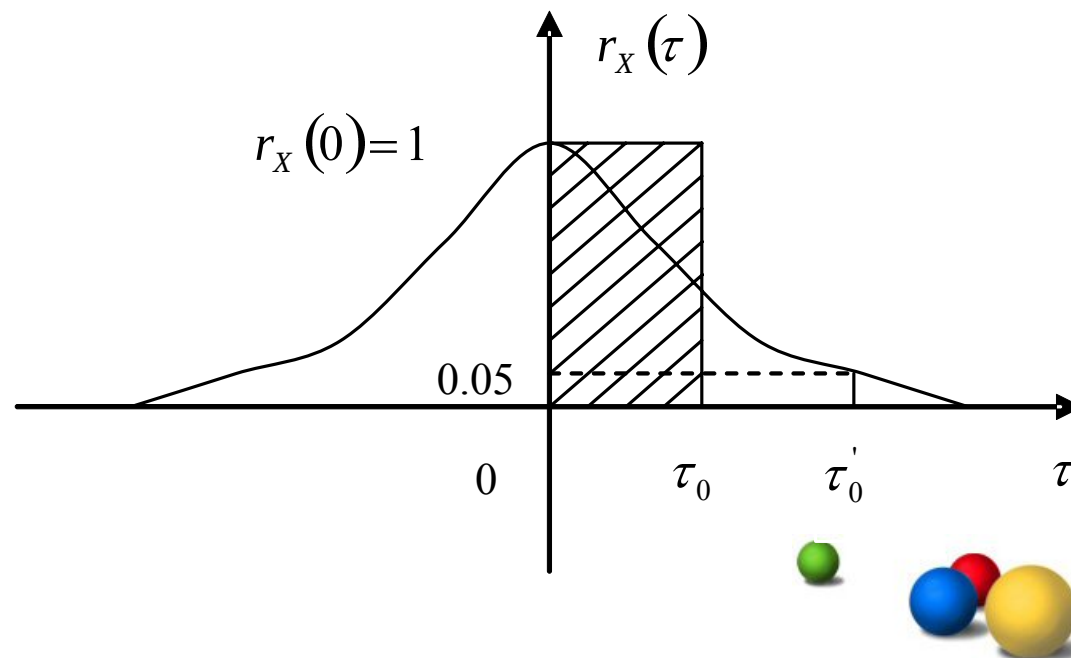




相关时间---定义2

- 把 $r_X(\tau)$ 曲线与横轴 τ 所围成的面积，等效成矩形面积，其高为 $r_X(0)$ ，而底的宽度 τ_0 则称为相关时间，即：

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} r_X(\tau) d\tau$$





两个随机过程的互相关函数

- 设有随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ ，它们在任两时刻 t_1 、 t_2 的值为随机变量 $X(t_1)$ 、 $Y(t_2)$ ，定义它们的互相关函数为：

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_2(x, y; t_1, t_2) dx dy \end{aligned}$$

式中： $p_2(x, y; t_1, t_2)$ 是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的二维联合概率密度。





- 定义中心化互相关函数（常称为互协方差函数）为：

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$

式中： $m_X(t_1)$ 和 $m_Y(t_2)$ 分别是变量 $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 的均值。





联合平稳随机过程

- 若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自是广义平稳过程，且它们的互相关函数仅是时刻间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 的单变量函数，即有：

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau)$$

则称过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 宽平稳相关（简称联合平稳）。

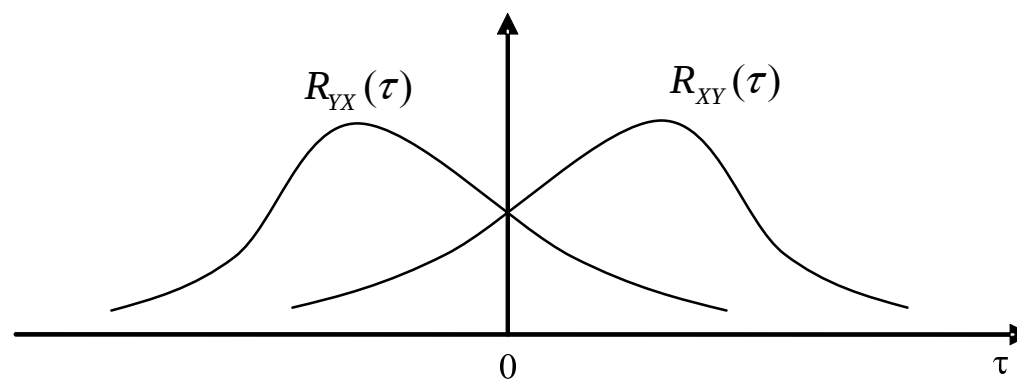




互相关函数的性质

(1) $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$

可见互相关函数一般既非奇函数 $[R_{XY}(\tau) \neq -R_{XY}(-\tau)]$, 又非偶函数 $[R_{XY}(\tau) \neq R_{XY}(-\tau)]$, 而具有如图所示的影像关系。





这是由于：

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = E[Y(t+\tau)X(t)] \\ &= R_{YX}(-\tau) \end{aligned}$$

同理，有： $C_{XY}(\tau) = C_{YX}(-\tau)$

(2) $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$

同理，有：

$$|C_{XY}(\tau)|^2 \leq C_X(0)C_Y(0)$$





联合各态历经随机过程

- 当过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳时，定义它们的时间互相关函数为：

$$\langle X(t)Y(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt$$

- 若它依概率（概率1）收敛于集合互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ ，即它们在概率意义上相等，有：

$$\langle X(t)Y(t+\tau) \rangle \stackrel{P}{=} \overline{X(t)Y(t+\tau)}$$

则称过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 具有联合各态历经性。





离散时间随机过程的定义

- 如果参量 t 取离散值 $t_1, t_2, \dots, t_n$ ，则这种随机过程就称为离散时间随机过程。这时 $X(t)$ ，是一串随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 所构成的序列，即随机序列。
- 随机序列也可以用 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来表示，或者用 $\{X_n\}$ 或 $\{X_n, n=1, 2, \dots, N\}$ 或 $X(n)$ 表示。





离散时间随机过程的数字特征 数学期望

- 离散时间随机过程 $\{X_n\}$ 的均值或数学期望定义为

$$m_{X_n} = E[X_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; n) dx$$

- 若 $g(\cdot)$ 是单值函数，则 $g(X_n)$ 构成一个新的离散时间随机过程，其数学期望可定义为

$$E[g(X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; n) dx$$





2 均方值与方差

- 离散时间随机过程的均方值定义为

$$\psi_{X_n}^2 = E[X_n^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; n) dx$$

- 离散时间随机过程的方差定义为

$$\sigma_{X_n}^2 = D[X_n] = E[(X_n - m_X)^2]$$

由数学期望的性质，可以证明上式可写成

$$\sigma_{X_n}^2 = E[X_n^2] - E^2[X_n] = \psi_{X_n}^2 - m_X^2$$

方差的平方根称作离散时间随机过程的标准差或根方差，即

$$\sigma_{X_n} = \sqrt{\sigma_{X_n}^2} = \sqrt{D[X_n]}$$





- 一般来说，均值、均方值和方差都是n的函数，但对严平稳离散时间随机过程来说，它们与n无关，都是常数，即

$$m_X = E[X_n]$$

$$\psi_X^2 = E[X_n^2]$$

$$\sigma_X^2 = E[(X_n - m_X)^2]$$





相关函数与协方差函数

- 自相关函数是描述随机过程在不同时刻的值与值之间依赖程度的一个量度，它定义为

$$R_X(n_1, n_2) = E[X_{n_1} X_{n_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; n_1, n_2) dx_1 dx_2$$

- 随机过程的自协方差函数定义为

$$K_X(n_1, n_2) = E[(X_{n_1} - m_{X_{n_1}})(X_{n_2} - m_{X_{n_2}})]$$

上式经简单推导，可以写为

$$K_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2) - m_{X_{n_1}} m_{X_{n_2}}$$





遍历性与时间平均量

- 如果一个随机序列 $X(n)$ ，它的各种时间平均（时间足够长）依概率1收敛于相应的集合平均，则称序列 $X(n)$ 具有严格（或狭义）遍历性，并简称此序列为严遍历序列。





- 实离散时间随机过程 $X(n)$ 的时间均值定义为

$$\langle X(n) \rangle = \overline{X(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X_n$$

- 类似地，随机序列的时间自相关函数定义为

$$R_X(n, n+m) = \overline{X(n)X(n+m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X_n X_{n+m}$$

由上两式定义的这两个时间平均量一般都是随机变量。





确定信号的频谱和能量谱密度

确定信号 $x(t)$ 是在 $-\infty < t < +\infty$ 的非周期实函数， $x(t)$ 的傅立叶变换存在的充要条件是：

(1). 满足狄利赫利条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

(2). 总能量有限，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$





则信号 $x(t)$ 的傅立叶变换为

$$S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅立叶反变换为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w) e^{j\omega t} dw$$

根据巴塞伐(Parseval)定理(总能量的谱表达式)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(w)|^2 dw$$

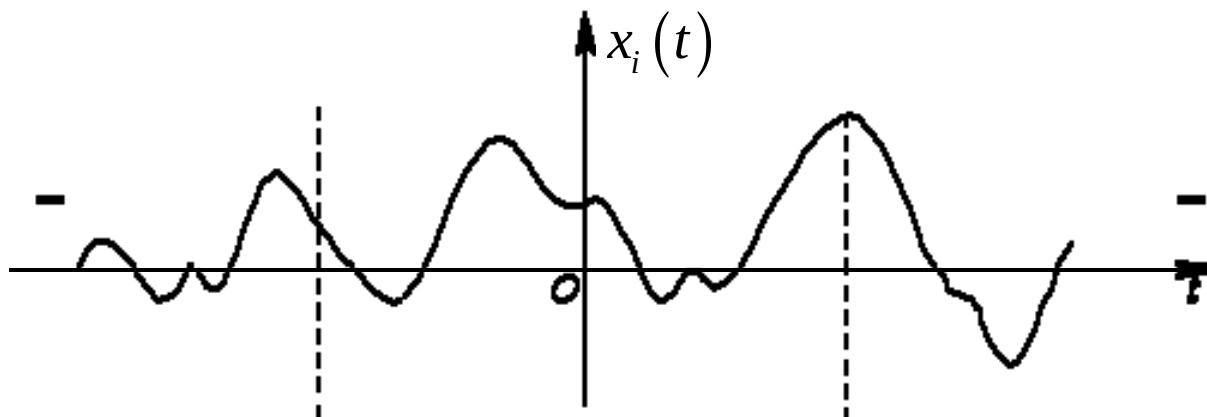
$|S(w)|^2$ 称为信号的能量谱密度。





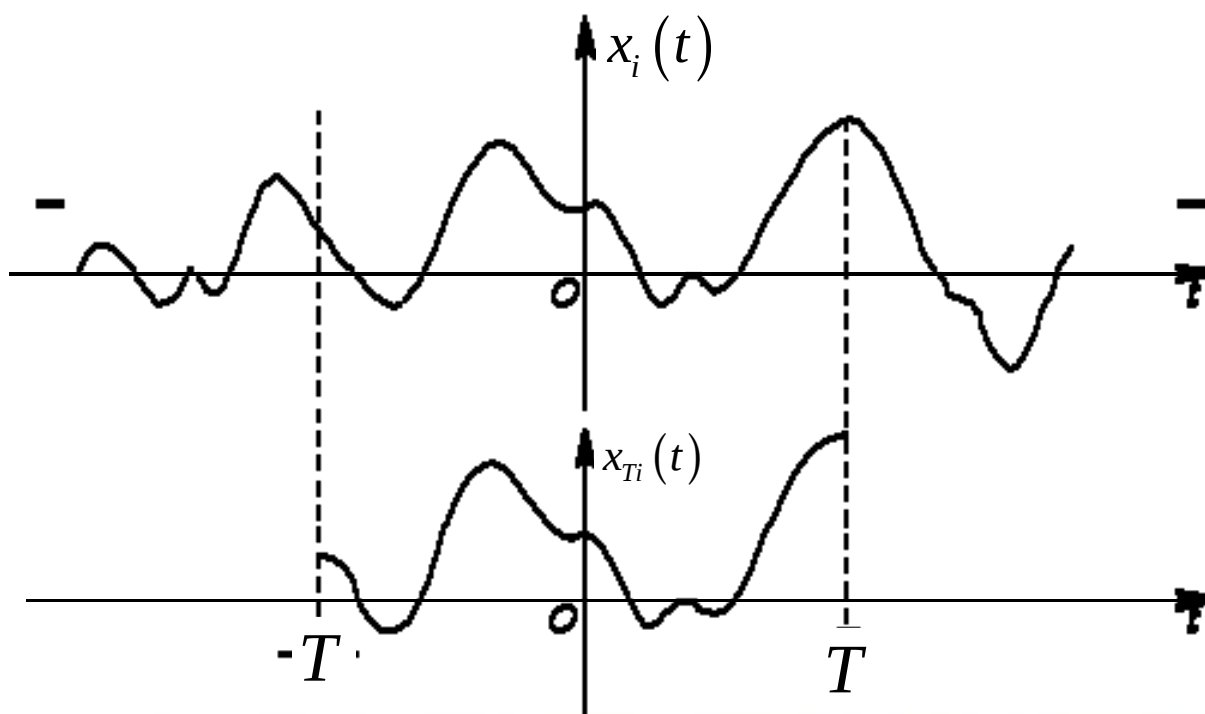
随机过程的功率谱密度

随机过程的样本函数 $x_i(t)$ 不满足傅立叶存在的绝对可积和能量可积条件，傅立叶不存在。





- 采取截断函数 $x_{Ti}(t)$ 规范化随机信号，使之满足傅立叶变换条件。
- 截断函数定义为：
$$x_{Ti}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| \leq T \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$





当T为有限值时，截断函数满足傅立叶变换条件，傅立叶变换为

$$\begin{aligned} X_{Ti}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{Ti}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T x_i(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

傅立叶反变换为

$$x_{Ti}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{Ti}(w) e^{j\omega t} dw$$

由巴塞伐定理得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{Ti}(t)^2 dt &= \int_{-T}^T x_{Ti}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{Ti}(w)|^2 dw \end{aligned}$$

对上式两边除2T





$$\begin{aligned}\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{Ti}(t)^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_{Ti}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_{Ti}(w)|^2}{2T} dw\end{aligned}$$





$$\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{Ti}(t)^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_{Ti}(t)^2 dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_{Ti}(w)|^2}{2T} dw$$

- 样本函数在时间区间 $[-T, T]$ 的平均功率。
- 由于样本函数是随机过程的任何一个样本函数，取决于随机试验，平均功率具有随机性。
- 可采用集合平均消除样本函数的随机性，即

$$E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t)^2 dt \right] = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(w)|^2}{2T} dw \right]$$

两边取极限

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)^2] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T} dw$$





$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)^2] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T} dw$$

若设

$$G_X(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T}$$

上式表示为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)^2] dt = P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(w) dw$$

$G_X(\omega)$ 称为随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度。

如随机过程是宽平稳过程时，则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)^2] dt = E[X(t)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(w) dw$$





信号的功率谱密度函数是指这样的函数:

- 1、当在整个频率范围内对它进行积分以后，得到信号的总功率；
- 2、描述了信号功率在各个不同频率上分布的情况；





功率谱密度的性质

1. 功率谱密度为非负实函数, 即

$$G_X(\omega) \geq 0$$

证明: 根据功率谱密度定义

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$$

2. 功率谱密度函数为 ω 的偶函数, 即

$$G_X(-\omega) = G_X(\omega)$$





平稳随机过程的功率谱密度是可积函数,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega < \infty$$

证明: 对于平稳随机过程有

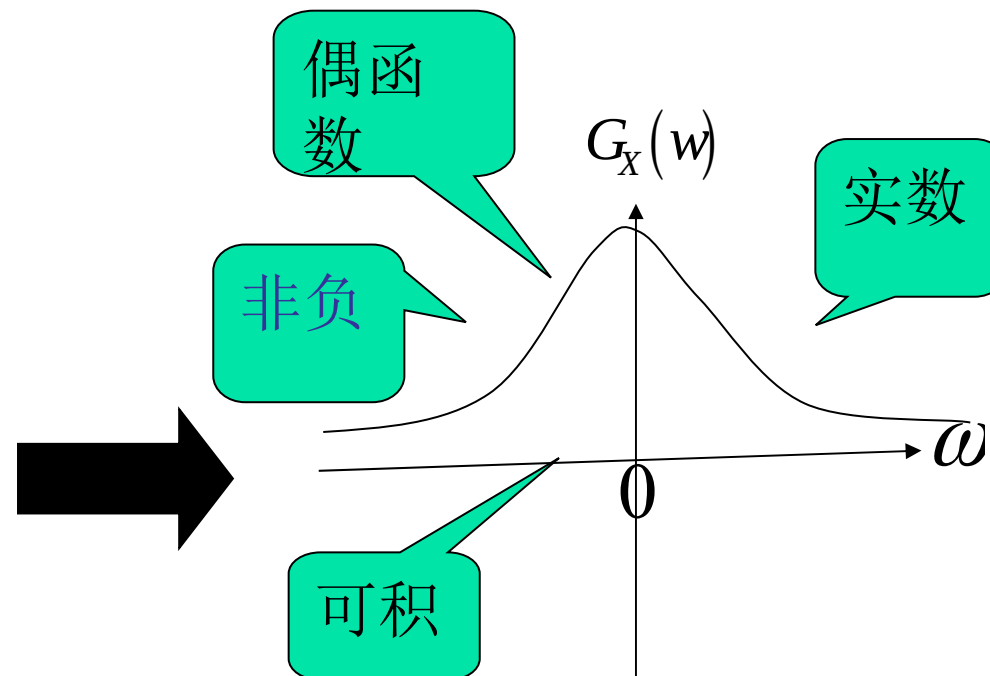
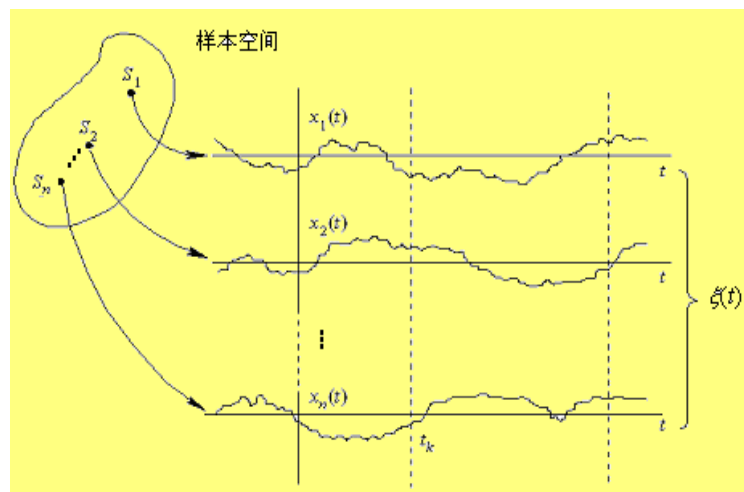
$$E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega$$

∵ 平稳随机过程的均方值有限

∴ 平稳随机过程的功率谱密度可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega < \infty$$





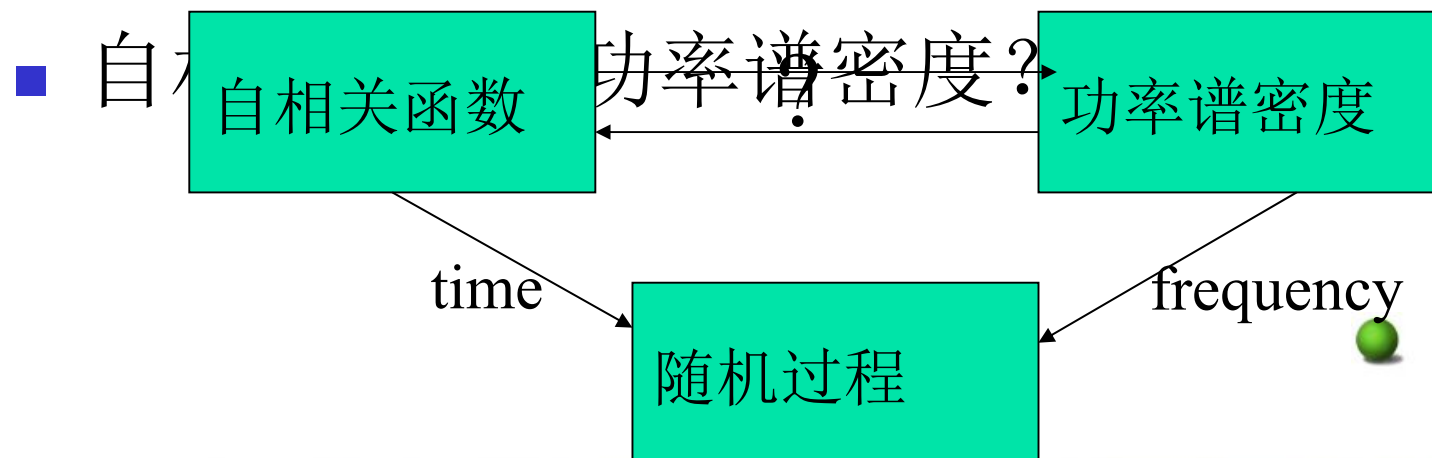
随机过程及其功率谱密度函数





功率谱密度与自相关函数之间的关系及其性质

- 自相关函数是从时间域上描述随机过程统计特性的重要特征。
- 功率谱密度是从频率域上描述随机过程统计特性的重要特征。





维纳—辛钦定理

平稳随机过程 $x(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和功率谱密度 $G_X(\omega)$ 有如下关系:

$$\begin{cases} G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

功率谱密度与自相关函数是傅立叶变换对





论证功率谱密度与自相关函数之间的关系

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$|X_T(\omega)|^2 = X_T(\omega) X_T(-\omega)$$

由 $G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2]$ 得:

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \int_{-T}^T x_T(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1\right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[x_T(t_1) x_T(t_2)] e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2$$





$$R_{x_T}(t_1, t_2) = E[x_T(t_1)x_T(t_2)] \quad -T < (t_1, t_2) < T$$

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2$$

$$\underline{\underline{t = t_1, \tau = t_2 - t_1}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t}^{T-t} \int_{-T}^T R_X(t, t + \tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t, t + \tau) dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$





$$\bar{R}_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t, t + \tau) dt$$

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

设 $X(t)$ 为平稳过程,则时间平均自相关函数等于集合平均自相关函数(过程上通常满足),即:

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$





$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

上式称为维纳—辛钦定理。





- 由于

$$e^{\pm j\omega\tau} = \cos \omega\tau \pm j \sin \omega\tau$$

- 所以维纳-辛钦定理又有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} G_X(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega \end{aligned} \right\}$$





功率谱 $G_X(\omega)$ 与 平均功率 P_X

1. 平均功率是功率谱在频率空间的积分

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega$$

证明:

$$P_X = E[X^2(t)]$$

平稳各态历经

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j0t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega$$





2. 特定频率 (ω_1, ω_2) 上平均功率 $\psi_X^2(\omega_1, \omega_2)$

$$\psi_X^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} G_X(\omega) d\omega$$

3. 单边谱密度 $F_X(\omega)$ 与双边谱密度 $S_X(\omega)$

$$F_X(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

物理谱密度
函数

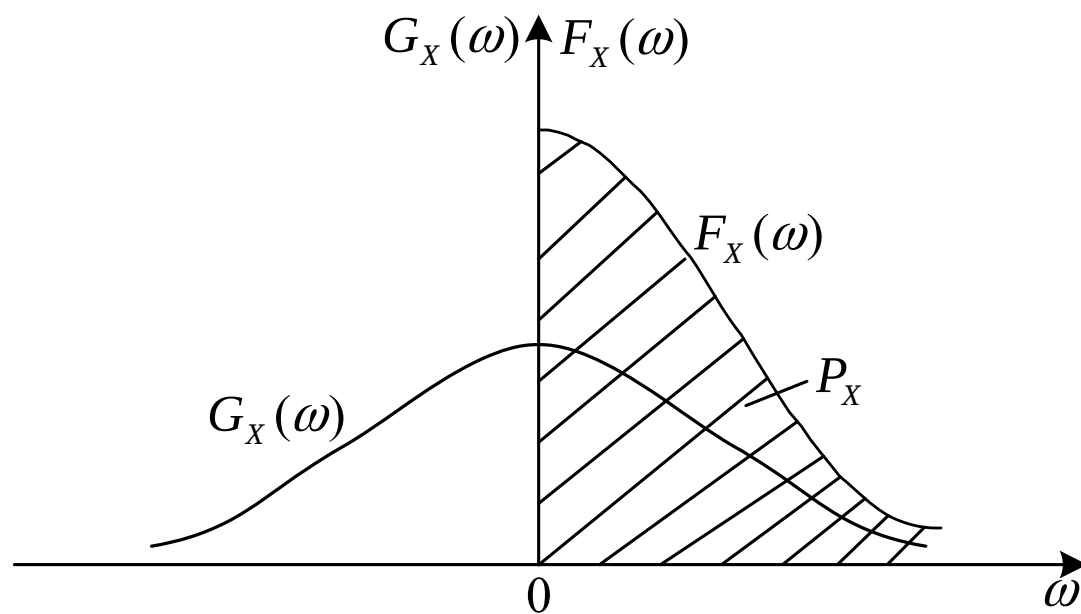
$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) d\omega$$

$$\psi_X^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_X(\omega) d\omega$$





■ 如图所示





- 因此可以得到维纳—辛钦定理的另一种表达式：

$$\left. \begin{aligned} F_X(\omega) &= 4 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega \end{aligned} \right\}$$

或

$$\left. \begin{aligned} F_X(f) &= 4 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \\ R_X(\tau) &= \int_0^{\infty} F_X(f) \cos 2\pi f \tau df \end{aligned} \right\}$$





- 功率谱密度是从频域来表示统计特性的重要参量。知道它之后，即可求出平稳过程消耗在一欧姆电阻上的总平均功率为：

$$P_X = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) d\omega$$

- 如图中的阴影面积所示。同理，还可求出在任何特定频率区间 (ω_1, ω_2) 上的平均功率为：

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_X(\omega) d\omega$$





说明:

- 1、以上讨论的功率谱密度都属于连续情况，即相应的随机过程不能含有直流成分或周期成分。
- 2、功率谱密度指单位带宽上的平均功率；
- 3、任何直流分量和周期分量在频域上都表现为频率轴上某点的零带宽内的有限功率，都会在频域的相应位置上产生离散频谱；而在零带宽上的有限功率等效于无限的功率谱密度。
- 4、借助 δ 函数，维纳—辛钦定理可推广至含有直流或周期性成分的平稳过程中。





- 例1. 6—1: 求例1.2-1所示随机初相信号 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 、 $F_X(\omega)$ 。

解: 由该例已经求得相关函数为: $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$

此式可以改写为 $R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} [e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}]$

$$\begin{aligned} \text{则 } G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} [e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}] d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} [2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)] \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \end{aligned}$$

$$F_X(\omega) = 2G_X(\omega)|_{\omega>0} = \pi A^2 \delta(\omega-\omega_0)$$





1.6.5 联合平稳随机过程的互谱密度

- 互谱密度与互相关函数也是一对傅立叶变换，

$$\left. \begin{aligned} G_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ G_{YX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ R_{YX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{YX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\}$$





互谱密度具有下列性质：

(1) $G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega)$

即 $G_{XY}(\omega)$ 与 $G_{YX}(\omega)$ 互为共轭函数。

(2) 若 $G_{XY}(\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$ ，则其实部为 ω 的偶函数，有 $a(\omega) = a(-\omega)$ ，而其虚部为 ω 的奇函数，有 $b(\omega) = -b(-\omega)$ 。

(3) 若过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 正交，则有

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 0$$





- **例1. 6—3:** 已知实随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳且正交, 试求过程 $Z(t) = X(t) + Y(t)$ 的自相关函数和自谱密度表达式。

- **解:** $Z(t)$ 的自相关函数为:

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] \\ &= E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\} \\ &= R_X(t, t+\tau) + R_Y(t, t+\tau) + R_{XY}(t, t+\tau) + R_{YX}(t, t+\tau) \end{aligned}$$





- 因为过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 联合平稳，故有：

$$R_Z(t, t + \tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) = R_Z(\tau)$$

- 又因为两过程正交，有 $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau) = 0$ ，故有：

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

- 由于 $R(\tau) \leftrightarrow G(\omega)$ ，因而求得 $Z(t)$ 的自谱密度为：

$$G_Z(\omega) = G_X(\omega) + G_Y(\omega)$$





离散时间随机过程的功率谱密度

- 随着数字技术的迅速发展，在电子工程领域中对离散时间随机过程的分析越来越重要。本节，我们将把功率谱密度的概念推广到离散时间随机过程。





- 设 $X(n)$ 为广义平稳离散时间随机过程，或简称为广义平稳随机序列，具有零均值，其自相关函数为 $R_X(m) = E[X(nT)X(nT + mT)]$ 或简写为 $R_X(m) = E[X(n)X(n+m)]$
- 当 $R_X(m)$ 满足条件 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |R_X(m)| < \infty$ 时，我们定义 $X(n)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 为自相关函数 $R_X(m)$ 的离散傅立叶变换，并记为

$$G_X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-jm\omega T}$$





- 在离散时间系统的分析中，有时用Z变换更为方便，所以也常把广义平稳离散时间随机过程的功率谱密度定义为 $R_X(m)$ 的Z变换，并记为 $G'_X(z)$ ，即

$$G'_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m)z^{-m}$$

式中， $z = e^{j\omega T}$ ，且 $G'_X(e^{j\omega T}) = G_X(\omega)$

- $R_X(m)$ 则为 $G'_X(z)$ 的逆Z变换。即

$$R_X(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D G'_X(z) z^{m-1} dz$$

上式中，D为在 $G'_X(z)$ 的收敛域内环绕z平面原点逆时针方向的一条闭合围线。





西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

随机信号分析课件

■ 谢谢！



厚德 求真 砺学 笃行