第 17 章　曲线积分

本章讲述第一型曲线积分(相当于一重积分的直接推广)、第二型曲线积分(数学和物理上的用途甚多)和第二型曲线积分与二重积分的关系—Green 公式(相当于二维 Newton-Leibniz 公式).

§17.1　第一型曲线积分

弧长函数　设$\gamma(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的一条可求长曲线. $\forall t\in[\alpha,\beta]$,令$s(t)=s(\gamma|_{[\alpha,t]})$为部分曲线$\gamma|_{[\alpha,t]}$的长度,则称$s(t)$是可求长曲线$\gamma$的弧长函数.

定义 17.1 设$\gamma(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的一条可求长曲线, $s(t)$是其弧长函数, f 是 $\gamma([\alpha,\beta])$上的函数, $\pi=\{[t_{k-1},t_k]:1\le k\le n\}$是$[\alpha,\beta]$的分割. 若不论 π 如何分法, $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$如何取法, 总存在有限极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\gamma(\xi_k)][s(t_k)-s(t_{k-1})],$$

则称该极限为函数 f 在曲线γ上的第一型曲线积分(或对弧长的曲线积分), 记成$\int_\gamma f(x,y,z)ds$. 其物理意义是“具有非均匀线密度的曲线的质量”.

注记 17.1′　第一型曲线积分与曲线的参数表示和方向无关.

注记 17.1″　当可求长曲线的弧长函数严格递增时, 该曲线具有自然参数表示. 显然, 自然参数表示下的第一型曲线积分就是普通的一重积分.

定理 17.1　设$\gamma(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的一条光滑曲线, f 是 $\gamma([\alpha,\beta])$上的连续函数, 则

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\gamma(t)]\|\gamma'(t)\|dt.$$

证: 因为光滑曲线具有自然参数表示, 而自然参数表示下的第一型曲线积分就是普通的一重积分, 故$\int_\gamma f(x,y,z)ds$存在. 由积分中值定理,

存在$\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$使得$s(t_k)-s(t_{k-1})=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|dt=\|\gamma'(\xi_k)\|(t_k-t_{k-1})$,

故
$$\int_\gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\gamma(\xi_k)][s(t_k)-s(t_{k-1})]$$
$$=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\gamma(\xi_k)]\|\gamma'(\xi_k)\|(t_k-t_{k-1})=\int_\alpha^\beta f[\gamma(t)]\|\gamma'(t)\|dt. \ \square$$

推论　$[a,b]$上的C^1函数$y=\varphi(x)$能确定平面C^1曲线$\gamma(x)=(x,\varphi(x))$ $(a\le x\le b)$. 若函数$f(x,y)$在$\gamma([a,b])$上连续, 则
$$\int_\gamma f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}dx.$$

求弧长元素的方法　平面曲线$f(x,y)=0$的弧长元素为$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}dx$或$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|}dy$；空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的切向量之一为$\det\begin{pmatrix}\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\\ \frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\end{pmatrix}=$ $(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\vec\tau$, 其弧长元素为$\frac{\|\vec\tau\|}{|\tau_1|}dx$或$\frac{\|\vec\tau\|}{|\tau_2|}dy$或$\frac{\|\vec\tau\|}{|\tau_3|}dz$.

证: 设曲线$f(x,y)=0$的参数表示为$(x,y(x))$, 则$y'=-\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial y}$, 故其弧长元素为$\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}dx$.

设曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的参数表示为$(x,y(x),z(x))$, 则$(1,y',z')$与$(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$平行, $(1,y',z')=(1,\frac{\tau_2}{\tau_1},\frac{\tau_3}{\tau_1})$, 故其弧长元素为$\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}dx$ $=\frac{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}}{|\tau_1|}dx=\frac{\|\vec\tau\|}{|\tau_1|}dx$. $\square$

例 1（利用对称性） 求$\int_\Gamma xyds$, 其中Γ为球$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线.

解: $\int_\Gamma xyds=\frac{1}{3}\int_\Gamma(yz+zx+xy)ds=\frac{1}{6}\int_\Gamma[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]ds$
$$=-\frac{1}{6}a^2\int_\Gamma ds=-\frac{1}{6}a^2 2\pi a=-\frac{1}{6}\pi a^3. \ \square$$

练习题 17.1（P_{262}） 1(1, 2, 4, 5), 2, 3.

§17.2 第二型曲线积分

术语 设$V\subset\mathbb{R}^3$是非空点集, 称V上的函数$f(x,y,z)$为V上的数量场; 称V上的向量值函数$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$为$V$上的向量场.

定义 17.2 设$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ $(\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的一条可求长曲线, $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$是$\gamma([\alpha,\beta])$上的向量场, $\pi=\{[t_{k-1},t_k]:1\le k\le n\}$是$[\alpha,\beta]$的分割. 若不论$\pi$如何分法, $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$如何取法, 总存在有限极限

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}[\gamma(\xi_k)]\bullet[\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})],$$

则称该极限为$\vec{F}$在曲线γ上的第二型曲线积分(或沿曲线γ的环量), 记成$\int_\gamma\vec{F}(x,y,z)\bullet d\gamma$或$\int_\gamma[P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz]$. 其物理意义是"非均匀力场对沿曲线运动的质点所做的功".

注记 17.2′ 第二型曲线积分与曲线的参数表示无关, 但与方向有关, 即$\int_{\gamma^-}\vec{F}(x,y,z)\bullet d\gamma^-=-\int_\gamma\vec{F}(x,y,z)\bullet d\gamma$.

术语 若$\gamma(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线, 则称$\gamma'(t)dt$为光滑曲线γ在$\gamma(t)$处的有向弧长元素. 记$\vec{\tau}(t)$为γ在$\gamma(t)$处与γ方向一致的单位切向量, 显然有$\gamma'(t)dt=\vec{\tau}(t)\|\gamma'(t)\|dt$.

定理 17.2 设$\gamma(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线, $\vec{F}(x,y,z)$是$\gamma([\alpha,\beta])$上的连续向量场, 则

$$\int_\gamma\vec{F}(x,y,z)\bullet d\gamma=\int_\alpha^\beta\vec{F}[\gamma(t)]\bullet\gamma'(t)dt.$$

证: 设$\pi=\{[t_{k-1},t_k]:1\le k\le n\}$是$[\alpha,\beta]$的分割, $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, 则有

$$\gamma(t_k)=\gamma(\xi_k)+\gamma'(\xi_k)(t_k-\xi_k)+o(|t_k-\xi_k|),$$

$$\gamma(t_{k-1})=\gamma(\xi_k)+\gamma'(\xi_k)(t_{k-1}-\xi_k)+o(|t_{k-1}-\xi_k|),$$

故 $$\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})=\gamma'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})+o(|t_k-t_{k-1}|).$$

于是
$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\gamma(\xi_k)]\bullet[\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})]$$
$$=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\gamma(\xi_k)]\bullet\gamma'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})(1+o(1))$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\vec{F}[\gamma(t)]\bullet\gamma'(t)dt.\ \square$$

函数的零重积分 对于$\mathbb{R}^n$中的点a, 规定它有两个方向；若n元函数f的定义域包含a, 则规定f在a点正向的积分$\int_a f=f(a)$, 在a点负向的积分$\int_{a^-} f=-f(a)$.

Newton-Leibniz 公式的另一表述 对于$\mathbb{R}$中的有向线段$I=[a,b]$, 规定其诱导边界为$\partial I=\{b,a^-\}$. 于是, 若f是I上的C^1函数, 则
$$\int_{\partial I} f=\int_I df.$$

推广的 Newton-Leibniz 公式 设$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线, 规定其诱导边界为$\partial\gamma=\{\gamma(\beta),\gamma(\alpha)^-\}$. 若$f$是$\gamma([\alpha,\beta])$的邻域上的$C^1$函数, 则
$$\int_{\partial\gamma} f=\int_\gamma df.$$
其中$\int_\gamma df$理解为第二型曲线积分$\int_\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)=\int_\gamma gradf\bullet d\gamma$.

证:
$$\int_{\partial\gamma} f=f(\gamma(\beta))-f(\gamma(\alpha))=\int_\alpha^\beta df(\gamma(t))$$
$$=\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))z'(t)\right)dt$$
$$=\int_\alpha^\beta gradf(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)dt=\int_\gamma df.\ \square$$

例 1 求$\int_\gamma xydx$, 其中曲线γ如下图所示.

解: $\int_\gamma xydx=\int_0^1 t0dt+\int_0^1 1t0dt$
$=0.\ \square$

例 2 求 $\int_\gamma (xdx+ydy+zdz)$ 和 $\int_\gamma (zdx+xdy+ydz)$, 其中曲线 γ 是球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线；从第一卦限看，γ 的方向是逆时针的.

解：γ 在 (x,y,z) 处与 γ 方向一致的单位切向量为

$$\vec{\tau}=\tfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\times\tfrac{(x,y,z)}{a}=\tfrac{1}{a\sqrt{3}}\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\\ 1,\ 1,\ 1\\ x,\ y,\ z\end{pmatrix}=\tfrac{1}{a\sqrt{3}}(z-y,x-z,y-x),$$

故
$$\int_\gamma (xdx+ydy+zdz)=\int_\gamma (x,y,z)\bullet\vec{\tau}\,ds=0.$$

$$\int_\gamma (zdx+xdy+ydz)=\int_\gamma (z,x,y)\bullet\vec{\tau}\,ds$$

$$=\tfrac{1}{a\sqrt{3}}\int_\gamma [(x^2+y^2+z^2)-(yz+zx+xy)]ds$$

$$=\tfrac{1}{a\sqrt{3}}\int_\gamma [(x^2+y^2+z^2)-\tfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}]ds$$

$$=\tfrac{\sqrt{3}a}{2}\int_\gamma ds=\tfrac{\sqrt{3}a}{2}\bullet 2\pi a=\sqrt{3}\pi a^2.\ \square$$

例 3 求 $\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy-ydx)$, γ 是平面上以逆时针为正向的圆周 $\partial B_a(0)$.

解：γ 的参数表示为 $\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t)\ (0\le t\le 2\pi)$, 故

$$\tfrac{1}{2}\int_\gamma (xdy-ydx)=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t\right)dt=\pi a^2.\ \square$$

练习题 17.2（P_{267}） 2(1, 2, 5), 3, 4(2), 6, 8, 9, 10.

§17.3 Green 公式

平面区域的诱导边界 设$D\subset\mathbb{R}^2$是有界闭区域,其边界由有限条光滑的简单曲线所组成,则规定D的诱导边界∂D为这有限条光滑的简单曲线,并按下述方式确定其正向——当直立的旅行者沿这有限条光滑的简单曲线的正向行走时,其左手总是指向D的内部.

定理 17.3(Green 公式——相当于二元函数的 Newton-Leibniz 公式) 设$D\subset\mathbb{R}^2$是有界闭区域,其边界由有限条光滑的简单曲线所组成,∂D是其诱导边界,$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$是$D$上的$C^1$(也称连续可微)向量场,则

$$\int_{\partial D}\left(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)=\iint_D\left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy.$$

证: 只需证明$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{\partial D}Pdx$即可. 将$D$分割成有限个小闭区域$\{D_i:1\le i\le k\}$,其中$D_i$如下图所示.

由于第二型曲线积分的往复抵消作用,只需证$-\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{\partial D_i}Pdx$即可.

一方面,
$$-\iint_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx$$
$$=-\int_a^b[P(x,\psi(x))-P(x,\varphi(x))]dx.$$

另一方面,
$$\int_{\partial D_i}Pdx=\int_{\gamma_1}Pdx+\int_{\gamma_2}Pdx+\int_{\gamma_3}Pdx+\int_{\gamma_4}Pdx$$
$$=\int_a^b P(x,\varphi(x))dx-\int_a^b P(x,\psi(x))dx.\ \square$$

例 1　设 D 与定理 17.3 相同, 则 $\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}\left(xdy-ydx\right)$.

解: $\frac{1}{2}\int_{\partial D}\left(-ydx+xdy\right)=\frac{1}{2}\iint_{D}[1-(-1)]dxdy=\sigma(D)$. □

例2　求 $\int_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 Γ 如下图所示.

解:

$$\int_{\Gamma}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}-\int_{\partial B_{\varepsilon}(0)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_{\partial D_{\varepsilon}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_{D_{\varepsilon}}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})]dxdy$$

$$=\iint_{D_{\varepsilon}}[\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}]dxdy$$

$$=\iint_{D_{\varepsilon}}0dxdy=0,$$

故

$$\int_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{\partial B_{\varepsilon}(0)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B_{\varepsilon}(0)}\left(-ydx+xdy\right)$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}=2\pi. \ \square$$

练习题 17.3（P_{273}） 1(3), 2(1), 3, 4, 5, 6, 7.