第 16 章　多重积分

二重积分的几何背景　设 $f>0$ 是有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，如何计算如下图所示的曲顶柱体的体积 V？(假定体积 V 存在，D 有面积)

(1) 将 D 分割成 k 个小闭区域 $\pi=\{D_i:1\le i\le k\}$，以 $\sigma(D_i)$ 表示 D_i 的面积，记 $\|\pi\|=\max\limits_{1\le i\le k} diam(D_i)$；

(2) 对每个小闭区域 D_i，任取 $\xi_i\in D_i$，建立和式

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(D_i),$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{k}\min f(D_i)\sigma(D_i)\le V$，$\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(D_i)\le\sum\limits_{i=1}^{k}\max f(D_i)\sigma(D_i)$；

(3) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall\|\pi\|<\delta$，成立 $\max f(D_i)-\min f(D_i)<\dfrac{\varepsilon}{\sigma(D)}$，$\forall i=1,2,\cdots,k$. 于是，

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(D_i)-V\right|\le\sum_{i=1}^{k}\big(\max f(D_i)-\min f(D_i)\big)\sigma(D_i)<\varepsilon.$$

这说明，$\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(D_i)=V$. □

三重积分的物理背景　将一个物体放置在 $\mathbb{R}^3$ 中，则可视它为有界闭区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ (V 一定有体积). 设该物体在 $x\in V$ 处的密度为 $\rho(x)$ (ρ 是 V 上的正值连续函数)，如何计算该物体的质量 M？

(1) 将V分割成k个小闭区域$\pi=\{V_i:1\le i\le k\}$, 以$\mu(V_i)$表示V_i的体积, 记$\|\pi\|=\max\limits_{1\le i\le k}diam(V_i)$;

(2) 对每个小闭区域V_i, 任取$\xi_i\in V_i$, 建立和式

$$\sum_{i=1}^{k}\rho(\xi_i)\mu(V_i),$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{k}\min\rho(V_i)\mu(V_i)\le M$, $\sum\limits_{i=1}^{k}\rho(\xi_i)\mu(V_i)\le\sum\limits_{i=1}^{k}\max\rho(V_i)\mu(V_i)$;

(3) 易知 $\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{k}\rho(\xi_i)\mu(V_i)=M$. □

§16.1 二维区间上的积分

二维区间 若I_1,I_2是$\mathbb{R}$中的区间, 则称$I=I_1\times I_2\subset\mathbb{R}^2$是 2 维区间, 称$\sigma(I)=|I_1||I_2|$是 2 维区间$I$的面积; 类似地, 可以定义 3 维区间及其体积; 也可以定义n维区间及其"体积".

定义 16.1 设$I\subset\mathbb{R}^2$是 2 维有界闭区间, f是I上的函数.

(1) 用垂直于x轴的$m-1$条直线和垂直于y轴的$n-1$条直线将I分割成$k=mn$个 2 维小闭区间$\pi=\{I_i: 1\le i\le k\}$, 称$\|\pi\|=\max\limits_{1\le i\le k}diam(I_i)$为$I$的分割$\pi$的模;

(2) 对每个小闭区间I_i, 任取$\xi_i\in I_i$, 建立和式$\sum\limits_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(I_i)$;

(3) 如果不论π如何分法, $\xi_i\in I_i$如何取法, 总存在有限极限

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(I_i)=A,$$

则称f在I上(Riemann)可积, 并称有限极限A为f在I上的(二重)积分, 记作$\iint_I f(x,y)dxdy$或$\int_I fd\sigma$.(称I为积分区域, f为被积函数, $fd\sigma$为被积表达式, $d\sigma$为面积元素, (x,y)为积分变量)

定理 16.1(可积的必要条件) 若f在 2 维有界闭区间$I\subset\mathbb{R}^2$上可积, 则它必在I上有界.

定理 16.2 和 16.3(二重积分的基本性质) 若 f,g 在 2 维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上可积, $c,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 是常数, 则

(1) $\int_I c d\sigma = c\sigma(I)$;

(2) $f\geq g$ 在 I 上成立 $\Rightarrow \int_I f d\sigma \geq \int_I g d\sigma$;

(3) $\alpha f+\beta g$ 也在 I 上可积, 并且

$\int_I(\alpha f+\beta g)d\sigma = \alpha\int_I f d\sigma + \beta\int_I g d\sigma$;(线性性质)

(4) $\iint_I f(x,y)dxdy = \iint_I f(u,v)dudv$.(二重积分与积分变量无关)

上和与下和 设 $I\subset\mathbb{R}^2$ 是 2 维有界闭区间, f 是 I 上的有界函数, 用垂直于 x 轴和 y 轴的直线将 I 分割成 k 个 2 维小闭区间 $\pi=\{I_i: 1\leq i\leq k\}$, 记 $M_i=\sup f(I_i),\ m_i=\inf f(I_i)$. 称 $\overline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{k}M_i\sigma(I_i)$ 为 f 关于分割 π 的上和; $\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{k}m_i\sigma(I_i)$ 为 f 关于分割 π 的下和.

定理 16.4 和 16.5 设 f 是 2 维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数, π_1 和 π_2 是 I 的分割, 将 π_1 和 π_2 合起来得到 I 的另一个分割 π, 则有

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leq\underline{S}(f,\pi)\leq\overline{S}(f,\pi)\leq\overline{S}(f,\pi_2).$$

上积分和下积分 设 f 是 2 维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数, 则称

$$\overline{I}(f)=\inf\{\overline{S}(f,\pi)\in\mathbb{R}: \pi\text{ 是 } I \text{ 的分割}\}$$

为 f 在 I 上的(Darboux)上积分; 称

$$\underline{I}(f)=\sup\{\underline{S}(f,\pi)\in\mathbb{R}: \pi\text{ 是 } I \text{ 的分割}\}$$

为 f 在 I 上的(Darboux)下积分.

显然, I 上有界函数 f 的上积分 $\overline{I}(f)$ 和下积分 $\underline{I}(f)$ 都存在, 并且 $-\infty<\underline{I}(f)\leq\overline{I}(f)<+\infty$.

定理 16.6 和 16.7(可积性定理) 若 f 是 2 维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的

有界函数,则下述 3 个条件彼此等价.

(1) $\forall \varepsilon > 0$,存在I的分割π,使得$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$;

(2) f在I上的上积分和下积分相等,即$\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$;

(3) f在$[a,b]$上(Riemann)可积.

练习题 16.1(P_{204}) 1,3,5.

§16.2　二元可积函数类

定理 16.8　若 f 是二维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数,则它必在 I 上(Riemann)可积.

证: 由 f 在 I 上的一致连续性和二重积分可积性定理的条件(1).□

定义 16.2　设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是一个点集.若 $\forall\varepsilon>0$,总存在可数个二维开区间 $\{I_i\}$ 覆盖了 E,并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon$,则称 E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集.

定义 16.3　设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是一个点集.若 $\forall\varepsilon>0$,总存在有限个二维开区间 $\{I_i:1\le i\le m\}$ 覆盖了 E,并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon$,则称 E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零面积集.显然,$\mathbb{R}^2$ 中的零面积集一定是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集;反之,结论可能不正确.

例 1　$\mathbb{R}^2$ 中的空集,独点集,有限集是零面积集;零面积集的子集也是零面积集;$\mathbb{Q}^2$ 是零测集,但不是零面积集;零测集的子集也是零测集;面积不为零的二维区间不是零测集.

定理 16.9($\mathbb{R}^2$ 中的零面积集和零测集的简单性质)

(1) 可数集是零测集,有限集是零面积集;

(2) 可数个零测集的并集仍然是零测集;

(3) 有限个零面积集的并集仍然是零面积集;

(4) 无界集一定不是零面积集;

(5) 有界集 E 是零面积集 $\Leftrightarrow\bar{E}$ 是零面积集 $\Leftrightarrow\bar{E}$ 是零测集.

证: (1)、(2)、(3)、(4)显然.

下面证(5)成立.先证第一个"$\Leftrightarrow$"."$\Leftarrow$"已知.当 E 是零面积集时,$\forall\varepsilon>0$,存在有限个二维开区间 $I_1,\cdots,I_m$ 使得

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\frac{\varepsilon}{2};$$

再取有限个二维开区间 $J_1,\cdots,J_m$ 使得

$$\overline{I}_i \subset J_i, \quad \sigma(J_i) < \sigma(I_i) + \frac{\varepsilon}{2m} \ (1 \le i \le m).$$

故 $$\overline{E} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{I}_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} J_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \sigma(J_i) < \sum_{i=1}^{m} \left(\sigma(I_i) + \frac{\varepsilon}{2m} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了“$\Rightarrow$”.

再证第一个“$\Leftrightarrow$”. “$\Rightarrow$”已知. 当$\overline{E}$是零测集时, $\forall \varepsilon > 0$, 存在可数个二维开区间$\{I_i\}$覆盖了$\overline{E}$, 并且满足$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon$. 由有限覆盖定理, 存在$\{I_i\}$中的有限个二维开区间$I_{i_1}, \cdots, I_{i_m}$也覆盖了$\overline{E}$, 并且

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma(I_{i_k}) < \varepsilon.$$

这就证明了“$\Leftarrow$”. □

命题 若$\mathbb{R}^2$中的曲线$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$的两个分量函数$x(t)$和$y(t)$至少有一个是C^1函数, 则该曲线的像$\gamma([\alpha, \beta])$是零面积集. 作为推论, $\mathbb{R}^2$中的线段是零面积集; $\mathbb{R}^2$中的光滑曲线的像是零面积集; 一维区间$[a,b]$上连续函数的图像是零面积集.

证: 不妨设$y(t)$是$[\alpha, \beta]$上的C^1函数, 取正数$M > \max\limits_{\alpha \le t \le \beta} |y'(t)|$. $\forall \varepsilon > 0$, 存在$[\alpha, \beta]$的分割$\{[t_{i-1}, t_i]: 1 \le i \le m\}$和$m$个一维开区间$\{(a_i, b_i): 1 \le i \le m\}$使得

$$a_i < x(t) < b_i, \ \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ 和 } b_i - a_i < \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \text{ 成立.}$$

当$t \in [t_{i-1}, t_i]$时有 $|y(t) - y(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t} y'(s) ds \right| < M(t - t_{i-1})$, 即

$$y(t_{i-1}) - M(t - t_{i-1}) < y(t) < y(t_{i-1}) + M(t - t_{i-1}).$$

记$c_i = y(t_{i-1}) - M(t_i - t_{i-1}), \ d_i = y(t_{i-1}) + M(t_i - t_{i-1})$, 则有

$$c_i < y(t) < d_i, \ \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ 和 } d_i - c_i = 2M(t_i - t_{i-1}).$$

取二维开区间$I_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, 便成立$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset I_i$, 从而$\gamma([\alpha, \beta]) \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$, 并且$\sum_{i=1}^{m} \sigma(I_i) < \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^{m} 2M(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon$. □

定理 16.10(Lebesgue 定理) 函数 f 在二维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上可积当且仅当 f 在 I 上有界, 并且其不连续点的全体是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集(即 f 在 I 上几乎处处连续).

证: 与单变量时 Lebesgue 定理的证明完全类似. □

定理 16.11 若 f 是二维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数, f 的支集

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in I:\ f(x)\neq 0\}}$$

是零测集, 则 f 在 I 上可积, 并且 $\int_I f d\sigma=0$.

证: $\partial I\bigcup\operatorname{supp} f$ 是闭集, 并且是零测集. 由于 f 在开集 $I\setminus\left(\partial I\bigcup\operatorname{supp} f\right)$ $=I^o\setminus\left(\operatorname{supp} f\right)^c$ 上恒等于零, 故 f 在 $I\setminus\left(\partial I\bigcup\operatorname{supp} f\right)$ 上连续, 从而 f 的不连续点的全体是零测集, 这说明 f 在 I 上可积. 对于 I 的任意分割 $\pi=\{I_i: 1\le i\le k\}$, 因为 I_i 不是零测集, 故 $\exists\xi_i\in I_i$ 使得 $\xi_i\notin\operatorname{supp} f$, 于是 $f(\xi_i)=0$. 因此

$$\int_I f d\sigma=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)=0. \ \square$$

定理 16.12 若函数 f 和 g 都是二维有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数, $\operatorname{supp}(f-g)$ 是零测集, f 和 g 中有一个在 I 上可积, 则另一个也在 I 上可积, 并且 $\int_I f d\sigma=\int_I g d\sigma$.

证: 由定理 16.11. □

练习题 16.2(P_{211}) 1, 3, 4, 5, 6, 8.

§16.3　二维区间上二重积分的计算

累次积分的次序问题　设 $f(x,y)$ 是二维有界闭区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上的函数. 若

(1)　$\forall x\in[a,b]$, Riemann 积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 存在, 并且 φ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积;

(2)　$\forall y\in[c,d]$, Riemann 积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 存在, 并且 g 在 $[c,d]$ 上 Riemann 可积,

问　$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ 是否成立?

f 是否在 I 二重可积, 并且成立等式

$\iint_I f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$?

反例　令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1;\\ -\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1;\\ 0, \text{其它的}(x,y)\in[0,1]^2, & \end{cases}$

则　$\varphi(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x=0;\\ -1, & 0<x<1;\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积;

$g(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y=0;\\ 1, & 0<y<1;\\ 0, & y=1\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积,

但　$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx=-1$, $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=1$, 而 $\iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy$ 不存在. □

定理 16.13(化二维区间上的二重积分为累次积分)　若函数 $f(x,y)$ 在二维有界闭区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 则

(1)　上积分 $\varphi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)dy$, 下积分 $\psi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)dy$ 都在 $[a,b]$ 可积, 并且 $\iint_I f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\left(\underline{\int_c^d} f(x,y)dy\right)dx$;

（2） 上积分 $g(y)=\overline{\int_a^b} f(x,y)dx$，下积分 $h(y)=\underline{\int_a^b} f(x,y)dx$ 都在 $[c,d]$ 可积，并且 $\iint_I f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\overline{\int_a^b} f(x,y)dx\right)dy=\int_c^d\left(\underline{\int_a^b} f(x,y)dx\right)dy$.

证：（略，证明很容易，但较罗嗦）. □

定理 16.14（累次积分交换次序的充分条件） 若函数 $f(x,y)$ 满足

（1） 在二维有界闭区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积；

（2） $\forall x\in[a,b]$，Riemann 积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 存在；

（3） $\forall y\in[c,d]$，Riemann 积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 存在，

则 φ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，g 在 $[c,d]$ 上 Riemann 可积，并且成立

$$\iint_I f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

证： 由定理 16.13 即知. □

定理 16.15 若函数 $f(x,y)$ 在二维有界闭区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $\iint_I f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

证： 由定理 16.13 即知. □

练习题 16.3（P_{215}） 1(1,3),2,3(1,2).

§16.4　有界点集上的二重积分

定义 16.5 和 16.6　设 f 是有界点集 $E\subset\mathbb{R}^2$ 上的函数, $I\supset E$ 是二维有界闭区间. 若 $f_E(x)=\begin{cases} f(x), x\in E; \\ 0\,, \quad x\in E^c \end{cases}$ 在 I 上可积, 则称 f 是 E 上的可积函数, 并且称 $\int_I f_E d\sigma$ 为 f 在 E 上的积分, 记作 $\iint_E f(x,y)dxdy$ 或 $\int_E f d\sigma$.

显然, f 是否在 E 上可积以及 f 在 E 上的积分值与二维有界闭区间 I 的选取无关.

定理 16.16(可积的充分条件)　设 f 是有界点集 $E\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数. 若 ∂E 和 f 的不连续点的全体都是零测集, 则 f 在 E 上可积.

证: $\mathbb{R}^2=E^o\bigcup\partial E\bigcup(\bar{E})^c$ 是无交并分解. f_E 在 $(\bar{E})^c$ 中没有不连续点, 在 E^o 中的不连续点也是 f 的不连续点, 故 f_E 的不连续点或者是 f 的不连续点或者在 ∂E 中. 这说明 f_E 的不连续点的全体是零测集. 由 Lebesgued 定理, f_E 在二维有界闭区间 $I\supset E$ 上可积. □

定理 16.17　若 f, g 在有界点集 $E\subset\mathbb{R}^2$ 上可积, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 是常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 也在 E 上可积, 并且

$$\int_E\left(\alpha f+\beta g\right)d\sigma=\alpha\int_E f d\sigma+\beta\int_E g d\sigma.$$

定理 16.18(积分区域的可加性)　若 f 是有界点集 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^2$ 上的可积函数, $E_1\bigcap E_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零面积集, 则 f 在 $E_1\bigcup E_2$ 上可积, 并且

$$\int_{E_1\cup E_2} f\,d\sigma=\int_{E_1} f d\sigma+\int_{E_2} f d\sigma.$$

证: $\operatorname{supp}\left(f_{E_1\cup E_2}-(f_{E_1}+f_{E_2})\right)\subset\overline{E_1\bigcap E_2}$ 是零测集, $(f_{E_1}+f_{E_2})$ 在二维有界闭区间 $I\supset E_1\bigcup E_2$ 上可积, 由定理 16.12, $f_{E_1\cup E_2}$ 在 I 上可积, 并且 $\int_I f_{E_1\cup E_2}d\sigma=\int_I f_{E_1}d\sigma+\int_I f_{E_2}d\sigma$, 即 $\int_{E_1\cup E_2} f\,d\sigma=\int_{E_1} f d\sigma+\int_{E_2} f d\sigma$. □

定义 16.7　对于有界点集 $E\subset\mathbb{R}^2$, 若常值函数 1 在 E 上可积, 则称 E 有面积, 并且称非负实数 $\int_E 1 d\sigma$ 是 E 的面积, 记为 $\sigma(E)$.

定理 16.19 有界点集$E\subset\mathbb{R}^2$是零面积集$\Leftrightarrow E$有面积, 并且$\sigma(E)=0$.

证: “$\Rightarrow$”. 设E是零面积集, 取二维有界闭区间$I\supset E$. 因为$\operatorname{supp}1_E=\bar{E}$是零测集, 由定理 16.11, 函数$1_E$在$I$上可积, 并且$\int_I 1_E d\sigma=0$. 这说明$E$有面积, $\sigma(E)=\int_E 1d\sigma=\int_I 1_E d\sigma=0$.

“$\Leftarrow$”. 设E有面积, $\sigma(E)=0$, 则$E^o=\varnothing$. 易知1_E的不连续点的全体恰为$\partial E=\bar{E}$. 由于1_E在二维有界闭区间$I\supset E$上可积, 故$\bar{E}$是零测集, 从而E是零面积集. □

推论 16.19′ 在零面积集的定义中, 可用平行四边形代替二维区间.

证: 设$E\subset\mathbb{R}^2$. 假定$\forall\varepsilon>0$, 存在有限个开平行四边形$J_1, J_2,\cdots, J_m$覆盖了E, 并且满足$\sum_{i=1}^m\sigma(J_i)<\varepsilon$. 取二维有界闭区间$I\supset\bigcup_{i=1}^m J_i=U$, 则

$$\overline{\int_I} 1_E\, d\sigma\le\overline{\int_I} 1_U\, d\sigma=\int_I 1_U\, d\sigma=\sigma(U)\le\sum_{i=1}^m\sigma(J_i)<\varepsilon.$$

这说明$\int_I 1_E\, d\sigma=0$, 即E有面积, 其面积$\sigma(E)=0$. □

定理 16.20 有界点集$E\subset\mathbb{R}^2$有面积, 当且仅当∂E是零面积集.

证: 1_E的不连续点的全体恰为∂E, 故E有面积(即1_E在二维有界闭区间$I\supset E$上可积)$\Leftrightarrow\partial E$是零测集$\Leftrightarrow\partial E$是零面积集. □

重要注记 为了保证常值函数的二重积分有意义, 在定义有界点集上的二重积分时, 通常要约定积分区域有面积. 于是, 在积分区域有面积的条件下, Lebesgue 定理仍然成立.

定理 16.21(第一积分中值定理) 设f, g是有面积的连通紧集$K\subset\mathbb{R}^2$上的连续函数. 若g在K上不改变符号, 则必存在$\xi\in K$使得

$$\int_K fgd\sigma=f(\xi)\int_K gd\sigma.$$

作为推论, 必存在$\xi\in K$使得

$$\int_K fd\sigma=f(\xi)\sigma(K).$$

证: 与定理 7.5 的证明完全相同. □

练习题 16.4(P_{220}) 2.

§16.5　有界点集上二重积分的计算

定理 16.22(化二重积分为累次积分)　若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 则

(1)
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

其中函数 $y_1(x)\le y_2(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y_1(x)\le y\le y_2(x),\ x\in[a,b]\}$;

(2)
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy,$$

其中函数 $x_1(y)\le x_2(y)$ 都在 $[c,d]$ 上连续, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x_1(y)\le x\le x_2(y),\ y\in[c,d]\}$.

证: 由定理 16.15. □

Dirichlet 公式　若函数 $f(x,y)$ 在闭三角形区域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le y\le x,\ x\in[a,b]\}$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_a^x f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_y^b f(x,y)dx\right)dy.$$

注记　利用累次积分来求二重积分时, 应适当选择积分次序来简化计算.

例　求二重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2\le y\le x,\ x\in[0,1]\}$.

解:
$$\iint_D \frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x}dy\right)dx=\int_0^1(1-x)\sin xdx$$
$$=\int_0^1(x-1)d\cos x=(x-1)\cos x\Big|_0^1-\int_0^1\cos xdx$$
$$=1-\sin 1.\ \square$$

练习题 16.5(P_{224}) 1(3, 5, 7), 2(2, 3, 5, 7), 3, 4, 5.

§16.6　二重积分的换元积分法

目标　(1) 简化被积函数；(2)简化积分区域.

正则映射　称从$E\subset\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的映射φ是正则映射, 如果φ在E的某个邻域V上是C^1单射, 并且$\det J\varphi$在V上处处不取零值(即φ是定义在V上的C^1同胚映射).

命题　若$\Delta\subset\mathbb{R}^2$是有面积的有界闭区域, φ是从Δ到$\mathbb{R}^2$的正则映射, 则$D=\varphi(\Delta)$也是有面积的有界闭区域, 其面积为$\int_\Delta|\det J\varphi|d\sigma$.

证: 由逆映射定理的推论, $\varphi(\Delta^o)$是区域. 注意到$\varphi(\Delta)=\overline{\varphi(\Delta^o)}$, 便知$\varphi(\Delta)$是有界闭区域.

小曲边四边形$\varphi(I_i)$的面积≈相应的平行四边形的面积

$$=\left\|\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\times\tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right\|=\Delta u\Delta v\left\|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u},\frac{\partial\varphi_2}{\partial u},0\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v},\frac{\partial\varphi_2}{\partial v},0\end{pmatrix}\right\|=\sigma(I_i)|\det J\varphi(\xi_i)|.$$

$\partial\Delta$能被有限个总面积很小的二维开区间所覆盖, 从而$\partial\varphi(\Delta)$能被有限个总面积很小的开平行四边形所覆盖, 故$\varphi(\Delta)$有面积, 其面积为

$$\sigma(\varphi(\Delta))=\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^k\sigma(\varphi(I_i))=\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^k|\det J\varphi(\xi_i)|\sigma(I_i)=\int_\Delta|\det J\varphi|d\sigma.\ \square$$

二重积分的换元积分法　若正则映射$\varphi(u,v)$将有面积的有界闭区域$\Delta\subset\mathbb{R}^2$映成有面积的有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$是D上的连续函数, 那么

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(\varphi(u,v))|\det J\varphi(u,v)|dudv.$$

证: $$\int_D f d\sigma = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\xi_i))\sigma(\varphi(I_i))$$
$$= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\xi_i))\left|\det J\varphi(\xi_i)\right|\sigma(I_i) = \int_\Delta f\circ\varphi\left|\det J\varphi\right| d\sigma. \ \square$$

利用极坐标求二重积分 若函数 $f(x,y)$ 在如下图所示的有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 则
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta\left(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\right)d\varphi.$$

证: $(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ 是从 Δ 到 D 上的正则映射, 该映射的 Jacobi 行列式为 $\det\begin{pmatrix}\cos\varphi, -r\sin\varphi\\ \sin\varphi, \ r\cos\varphi\end{pmatrix} = r$. $\square$

注记 当二重积分的积分区域是圆盘, 扇形, 圆环和扇环时, 用极坐标作积分变量可能会方便些.

换元积分法的某些技巧

(1) 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon a\le\varphi_1(x,y)\le b,\ c\le\varphi_2(x,y)\le d\}$, 利用 $(u,v)=(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))$ 作积分变量, 则有
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(\varphi^{-1}(u,v))\left|\det J\varphi^{-1}(u,v)\right| dudv.$$

(2) 设 $(u,v)=(a_1x+b_1y+c_1, a_2x+b_2y+c_2)$ 将有界闭区域 D 映成 Δ, 则有
$$\iint_D f(a_1x+b_1y+c_1, a_2x+b_2y+c_2)dxdy = \iint_\Delta \frac{f(u,v)}{\left|\det\begin{pmatrix}a_1, b_1\\ a_2, b_2\end{pmatrix}\right|}dudv.$$

例 1 求概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解: 记 $I(R)=\int_0^R e^{-x^2}dx\ (R>0)$, 则有等式

$$4\left(I(R)\right)^2=\left(\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy\right)=\iint\limits_{[-R,R]^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

显然成立不等式

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy<4\left(I(R)\right)^2<\iint\limits_{x^2+y^2\le 2R^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R}e^{-r^2}rdr\right)d\varphi<4\left(I(R)\right)^2<\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}R}e^{-r^2}rdr\right)d\varphi,$$

$$\pi(1-e^{-R^2})<4\left(I(R)\right)^2<\pi(1-e^{-2R^2}).$$

令 $R\to+\infty$, 就得到 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

例 2(利用对称性) 设有面积的有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 关于 y 轴(或 x 轴)对称, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 并且在 D 上成立 $f(-x,y)=-f(x,y)$ (或 $f(x,-y)=-f(x,y)$), 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0.$$

作为推论, 当自然数 m 和 n 中至少有一个是奇数时, 有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^m y^n dxdy=0.$$

证: $(x,y)=(-u,v)$ 是从 D 到 D 上的正则映射, 该映射的 Jacobi 行列式为 $\det\begin{pmatrix}-1,0\\0,1\end{pmatrix}=-1$. 故

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(-u,v)dudv$$
$$=-\iint_D f(u,v)dudv=-\iint_D f(x,y)dxdy.\ \square$$

例 3(特殊技巧) 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^2dxdy$.

解:
$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R}r^3dr\right)d\varphi=\frac{\pi}{4}R^4.\ \square$$

练习题 16.6(P_{233}) 2(1), 3, 4, 5, 6, 7, 8.

§16.7 三重积分

建立二重积分理论的步骤如下：

几何意义为“曲顶柱体的体积”$\rightarrow$二维区间的面积$\rightarrow$定义二维有界闭区间上的二重积分$\rightarrow$由上和、下和、上积分、下积分给出的可积性充要条件$\rightarrow$零测集、零面积集$\rightarrow$Lebesgue 定理$\rightarrow$化二维有界闭区间上的二重积分为累次积分$\rightarrow$定义有界点集上的二重积分$\rightarrow$定义有界点集的面积$\rightarrow$有面积的充要条件$\rightarrow$化有界点集上的二重积分为累次积分$\rightarrow$二重积分的换元积分法.

建立三重积分理论的步骤如下：

物理意义为“非均匀密度物体的质量”$\rightarrow$三维区间的体积$\rightarrow$定义三维有界闭区间上的三重积分$\rightarrow$由上和、下和、上积分、下积分给出的可积性充要条件$\rightarrow$零测集、零体积集$\rightarrow$Lebesgue 定理$\rightarrow$化三维有界闭区间上的三重积分为累次积分$\rightarrow$定义有界点集上的三重积分$\rightarrow$定义有界点集的体积$\rightarrow$有体积的充要条件$\rightarrow$化有界点集上的三重积分为累次积分$\rightarrow$三重积分的换元积分法.

命题 1（化三维区间上的三重积分为累次积分） 若函数 $f(x,y,z)$ 在三维有界闭区间 $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3$ 上可积，则

（1） 上积分 $\varphi(x,y) = \overline{\int_{I_3}} f(x,y,z)dz$，下积分 $\psi(x,y) = \underline{\int_{I_3}} f(x,y,z)dz$ 都在 $I_1 \times I_2$ 可积，并且

$$\iiint_I f(x,y,z)dxdydz = \iint_{I_1\times I_2}\left(\overline{\int_{I_3}} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$
$$= \iint_{I_1\times I_2}\left(\underline{\int_{I_3}} f(x,y,z)dz\right)dxdy;$$

（2） 上积分 $g(z) = \overline{\iint_{I_1\times I_2}} f(x,y,z)dxdy$，下积分 $h(z) = \underline{\iint_{I_1\times I_2}} f(x,y,z)dxdy$ 都在 I_3 可积，并且

$$\iiint_I f(x,y,z)dxdydz = \int_{I_3}\left(\overline{\iint_{I_1\times I_2}} f(x,y,z)dxdy\right)dz$$

$$= \int_{I_3}\left(\underline{\iint_{I_1\times I_2}} f(x,y,z)dxdy\right)dz$$

证：与定理 16.13 完全相同. □

定理 16.23（化三重积分为累次积分） 若函数 $f(x,y,z)$ 在如下图所示的有体积的有界闭区域$V\subset\mathbb{R}^3$上连续,

则

（1） $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy\,,$$

其中$D\subset\mathbb{R}^2$是有面积的有界闭区域, 函数$z_1(x,y)\le z_2(x,y)$都在D上连续, $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$；

（2） $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz\,,$$

其中V恰好位于平面$z=a$和$z=b$之间, 并且每个$D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y,z)\in V\}\ (a\le z\le b)$都是有面积的有界闭区域.

证明：取三维有界闭区间$I=I_1\times I_2\times I_3\supset V$, 则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_I f_V(x,y,z)dxdydz\,.$$

(1) $$\iiint_I f_V(x,y,z)dxdydz = \iint_{I_1\times I_2}\left(\overline{\int_{I_3}} f_V(x,y,z)dz\right)dxdy$$

$$= \iint_D \left(\overline{\int_{I_3}} f_V(x,y,z)dz \right) dxdy = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \text{；}$$

(2) $$\iiint_I f_V(x,y,z)dxdydz = \int_{I_3} \left(\overline{\iint_{I_1 \times I_2}} f_V(x,y,z)dxdy \right) dz$$

$$= \int_a^b \left(\overline{\iint_{I_1 \times I_2}} f_V(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz . \ \square$$

例1 求 $\iiint_V zdxdydz$, 其中 V 是如下图所示的圆锥体.

解: $$\iiint_V zdxdydz = \int_0^h \left(\iint_{D_z} dxdy \right) zdz = \pi \int_0^h \left(\tfrac{R}{h} \right)^2 z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4} . \ \square$$

命题 2 若 $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ 是有体积的有界闭区域, φ 是从 Δ 到 $\mathbb{R}^3$ 的正则映射, 则 $V = \varphi(\Delta)$ 也是有体积的有界闭区域, 其体积为 $\int_\Delta \left| \det J\varphi \right| d\mu$.

证: 完全类似于二维情形.

小曲面六面体 $\varphi(I_i)$ 的体积 $\approx$ 相应的平行六面体的体积

$$= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \times \frac{\partial \varphi}{\partial w} \Delta w \right) \right| = \Delta u \Delta v \Delta w \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \det J\varphi(\xi_i) \right| \mu(I_i) . \ \square$$

定理 16.24(三重积分的换元积分法) 若正则映射$\varphi(u,v,w)$将有体积的有界闭区域$\Delta\subset\mathbb{R}^3$映成有体积的有界闭区域$V\subset\mathbb{R}^3$，$f(x,y,z)$ 是V上的连续函数, 那么

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Delta f(\varphi(u,v,w))\left|\det J\varphi(u,v,w)\right|dudvdw.$$

证：完全类似于二维情形. □

利用柱坐标求三重积分 记$(x,y,z)=\Phi(r,\varphi,z)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)$,则$\det J\Phi(r,\varphi,z)=r$, 故

$$\iiint_{\Phi(\Delta)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Delta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)rdrd\varphi dz.$$

当三重积分的积分区域是圆柱, 扇柱, 圆环柱和扇环柱时, 用柱坐标作积分变量可能会方便些.

利用球坐标求三重积分 记$(x,y,z)=\Phi(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$,则$\det J\Phi(r,\varphi,z)=r^2\sin\theta$, 故

$$\iiint_{\Phi(\Delta)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Delta f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

当三重积分的积分区域是球, 球圆锥, 球环和球圆台时, 用球坐标作积分变量可能会方便些.

例 2 求$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, 其中$V$是如下图所示的半圆柱.

解：$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi}r^2dr\right)d\varphi\right)zdz=\dfrac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi$. □

例 3 求$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$，其中$V$是如上图所示的球锥.

解：$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^R r^4 dr\right)\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \dfrac{2\pi R^5}{5}(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2})$. □

例 4 求$\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} x^2 dxdydz$.

解：
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} x^2 dxdydz = \frac{1}{3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R r^4 dr\right)\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \frac{4\pi R^5}{15}.\ \square$$

例 5 化简$\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f(ax+by+cz)dxdydz$.

解： 取3阶正交方阵A，使得A的第1行为$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$. 作变量代换$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f(ax+by+cz)dxdydz$$
$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le R^2} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\left|\det A^{-1}\right|dudvdw$$
$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le R^2} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)dudvdw.\ \square$$

练习题 16.7（P_{243}） 1(2, 4), 2(2), 3, 4, 5, 6, 7(2, 3), 8(1, 2).

§16.8　n重积分

定理 16.25(化n重积分为累次积分) 若函数$f(x_1,\cdots,x_n)$在下述类型的有体积的有界闭区域$V\subset\mathbb{R}^n$上连续, 则

(1) $\int_V f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=\int_D\left(\int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_n\right)dx_1\cdots dx_{n-1}$,

其中$D\subset\mathbb{R}^{n-1}$是有体积的有界闭区域, 函数$\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\le\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})$都在$D$上连续, $V=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\in\mathbb{R}^n:\ \varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\le x_n\le\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}),$ $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D\}$;

(2) $\int_V f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=\int_a^b\left(\int_{D_{x_n}} f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n$,

其中V恰好位于超平面$x_n=a$和$x_n=b$之间, 并且每个$D_{x_n}=\{(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\in V\}\ (a\le x_n\le b)$都是有体积的有界闭区域.

(3)
$$\int_V f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$
$$=\int_{D_1}\left(\int_{D_2} f(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)dx_{k+1}\cdots dx_n\right)dx_1\cdots dx_k,$$

其中$D_1\subset\mathbb{R}^k$和$D_2\subset\mathbb{R}^{n-k}$都是有体积的有界闭区域, $V=D_1\times D_2, 1\le k\le n$.

§16.9 重积分的物理应用举例

例 1（物体的质量和质心） 设$\rho(x,y,z)$是物体$V\subset\mathbb{R}^3$的密度函数, 求V的质量和质心.

解: 如下图所示, 阴影小区域的质量约是$\rho(x,y,z)d\mu$, 故

$$V\text{ 的质量}=\iiint_V \rho(x,y,z)d\mu .$$

对于质点组$\{(x_i,y_i,z_i):1\le i\le k\}$（每个质点相应的质量为$m_i$）, 易知其

$$\text{质心坐标}=\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i,y_i,z_i)}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

故 $$V\text{ 的质心坐标}=\frac{\iiint_V \rho(x,y,z)(x,y,z)d\mu}{\iiint_V \rho(x,y,z)d\mu}. \square$$

例 2（液体对竖置平面区域的压力） 设竖置的平面区域$D\subset\mathbb{R}^2$浸入在以Q为比重的液体中, 求液体对D一侧的压力F.

解: 建立平面直角坐标系使得D位于该平面上, 并且y轴位于液体表面上, 如上图所示. 液体对阴影小区域的压力约是$Qxd\sigma$, 故

$$F=\iint_D Qxd\sigma = Q\cdot(D\text{ 的重心深度})\cdot\sigma(D). \square$$

例 3（物体的转动惯量） 设$\rho(x,y,z)$是物体$V\subset\mathbb{R}^3$的密度函数, 求V关于点(x_0,y_0,z_0), 直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$和平面$Ax+By+Cz+D=0$的转动惯量.

解：(1) V 关于点的转动惯量是

$$\iiint_V \left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)\rho(x,y,z)d\mu\text{；}$$

(2) 如下图所示, V 关于直线的转动惯量是

$$\frac{1}{l^2+m^2+n^2}\iiint_V \left\|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \vec{e}_3\\ l, & m, & n\\ x-x_0, & y-y_0, & z-z_0\end{pmatrix}\right\|^2 \rho(x,y,z)d\mu\text{；}$$

(3) 如下图所示, V 关于平面的转动惯量是

$$\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\iiint_V \left(Ax+By+Cz+D\right)^2\rho(x,y,z)d\mu\,.\ \square$$

$\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\|=\|\vec{v}_1\|\cdot$点到直线距离　　$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\cos\theta=\|\vec{v}_1\|\cdot$点到平面距离

例 4（物体间的引力） 设 $\rho_1(x,y,z)$ 是物体 $V_1\subset\mathbb{R}^3$ 的密度函数, $\rho_2(x,y,z)$ 是物体 $V_2\subset\mathbb{R}^3$ 的密度函数, K 是引力常数. 求物体 V_1 对 V_2 的引力.

解：V_1 对质量为 m 的质点 (u,v,w) 的引力是

$$Km\iiint_{V_1}\frac{(x-u,y-v,z-w)}{\left((x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\rho_1(x,y,z)dxdydz\,,$$

故 V_1 对 V_2 的引力是

$$K\iiint_{V_2}\left(\iiint_{V_1}\frac{(x-u,y-v,z-w)}{\left((x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\rho_1(x,y,z)dxdydz\right)\rho_2(u,v,w)dudvdw\,.\ \square$$

练习题 16.9（P_{256}） 1, 2, 3, 4, 5, 6.