§13.7　多变量连续函数

定义 13.16　设 f 是非空点集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数，$a\in D$．若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in D\bigcap B_\delta(a)$，成立 $\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon$，则称 f 在 a 处连续，或 a 是 f 的连续点；若 f 在 D 中的每个点处都连续，则称 f 在 D 上连续，或 f 是 D 上的连续函数；D 上连续函数的全体通常用 $C(D)$ 表示.

命题 1(在某点处连续的等价条件)　设 f 是非空点集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数，$a\in D$. 若 a 是 D 的孤立点，则 f 必在 a 处连续；若 a 是 D 的极限点，则 f 在 a 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

命题 2　若多变量函数 f,g 都在 a 处连续，则 $f\pm g$, fg 也都在 a 处连续；在附加上条件“g 处处不取零值”后，$\dfrac{f}{g}$ 也在 a 处连续.

命题 3　若多变量函数 f 在 a 处连续，单变量函数 g 在 $b=f(a)$ 处连续，则 $g\circ f$ 在 a 处连续.

例 1　$\mathbb{R}^n$ 中有限点集上的任何函数都是连续函数.

例 2　$\mathbb{R}^n$ 上 n 元多项式函数是连续函数；n 元有理函数是其定义域上的连续函数.

例 3(代表性的例子)　(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续；(2) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ 上连续，在 $(0,0)$ 处不连续.

证：这是因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)$ 不存在之故. □

定义 13.17(重要的概念)　设 f 是非空点集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数. 若 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，使得 $\forall\ x,y\in D$，$\|x-y\|<\delta$，成立 $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$，则

称 f 在 D 上一致连续, 或 f 是 D 上的一致连续函数. 显然, 若 f 是 D 上的一致连续函数, 则 f 一定是 D 上的连续函数(反之则可能不正确).

注记 13.17′ 函数 f 在 D 上不一致连续 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0$ 和 $\{x_i\},\ \{y_i\}\subset D$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}|x_i-y_i|=0$, 并且 $|f(x_i)-f(y_i)|\geq\varepsilon,\ \forall i\in\mathbb{N}^*$.

例 4 $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ 上连续, 但不一致连续.

解: $\lim\limits_{i\to\infty}\left\|(\frac{1}{i},\frac{1}{i})-(\frac{1}{i},0)\right\|=0,\ \left|g(\frac{1}{i},\frac{1}{i})-g(\frac{1}{i},0)\right|=\frac{1}{2}$. □

定理 13.22 $\mathbb{R}^n$ 中紧致集 D 上的连续函数 f 一定在 D 上一致连续.

证: (利用 D 的列紧性反证)假定连续函数 f 不一致连续, 即 $\exists\varepsilon>0$ 和 $\{x_i\},\ \{y_i\}\subset D$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}|x_i-y_i|=0$, 并且 $|f(x_i)-f(y_i)|\geq\varepsilon,\ \forall i\in\mathbb{N}^*$. 取 $\{x_i\}$ 的一个子列 $\{x_{k_i}\}$ 收敛于 $a\in D$, 则 $\{y_{k_i}\}$ 也收敛于 $a\in D$, 从而 $0=|f(a)-f(a)|=\lim\limits_{i\to\infty}|f(x_{k_i})-f(y_{k_i})|\geq\varepsilon>0$, 得到矛盾. □

定理 13.23 若 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是紧致集, f 是 D 上的连续函数, 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧致集. 作为推论, f 在 D 上有界.

证: 只需证 $f(D)$ 列紧. $\forall\{y_i\}\subset f(D),\exists\{x_i\}\subset D$ 使得 $y_i=f(x_i),\ i\in\mathbb{N}^*$. 取 $\{x_i\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$ 收敛于 $a\in D$, 则 $\{y_{k_i}=f(x_{k_i})\}$ 收敛于 $f(a)\in f(D)$. 这说明 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的列紧集. □

定理 13.24(最大值和最小值的可达性) 若 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是紧致集, f 是 D 上的连续函数, 则必 $\exists a,b\in D$, 使得 $f(a)=\min\limits_{x\in D}f(x)$, $f(b)=\max\limits_{x\in D}f(x)$. 作为推论, f 在 D 上有界.

证: 利用 D 的列紧性易知. □

定理 13.25 和 13.26 若 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是连通点集, f 是 D 上的连续函数, 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的区间. 作为推论, f 在 D 上具有介值性.

证：对于任意非空无交并分解 $f(D)=A\bigcup B$，能得到另一个对于任意非空无交并分解 $D=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$．于是，$f^{-1}(A)\bigcap(f^{-1}(B))'$ 和 $(f^{-1}(A))'\bigcap f^{-1}(B)$ 至少有一个非空．不妨设 $a\in f^{-1}(A)$ 是 $f^{-1}(B)$ 的极限点，则 $\exists\{x_i\}\subset f^{-1}(B)$ 收敛于 a，故 $\{f(x_i)\}\subset B$ 收敛于 $f(a)\in A$，从而 $A\bigcap B'\neq\varnothing$．这说明 $f(D)$ 连通．□

练习题 13.7（P_{100}）　1, 2.（阅读 3, 4, 5, 6）

问　题 13.7（P_{102}）　1.（阅读 2, 3）

§13.8 连续映射

定义在$\mathbb{R}^n$中非空点集上的映射 若$D\subset\mathbb{R}^n$是非空点集，则映射$f:D\to\mathbb{R}^m$便自动地确定了D上的m个n元函数$f_k\ (k=1,2,\cdots,m)$满足

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)),\ \forall x\in D;$$

反之，也能用D上的m个n元函数$f_k\ (k=1,2,\cdots,m)$来定义一个映射$f:D\to\mathbb{R}^m$，其中

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)),\ \forall x\in D;$$

通常可将映射$f:D\to\mathbb{R}^m$记成$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)),\ \forall x\in D$.

定义 13.18 设f是从非空点集$D\subset\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的映射，a是D的极限点，$p\in\mathbb{R}^m$是固定点. 若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$\forall x\in D,0<\|x-a\|<\delta$，成立$\|f(x)-p\|<\varepsilon$，则称当$x\to a$时$f(x)$趋向于$p$；或称当$x\to a$时$f$有极限$p$；或称当$x\to a$时$f$以$p$为极限；或称$f$在$a$处有极限$p$. “当$x\to a$时$f$有极限$p$”这件事用数学符号表示成

$$\lim_{x\to a}f(x)=p\quad\text{或}\quad f(x)\to p\ (x\to a).$$

定义 13.18′ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=p\Leftrightarrow\forall B_\varepsilon(p),\exists B_\delta(a)$，使得$\forall x\in D\cap(B_\delta(a)\setminus\{a\})$，成立$f(x)\in B_\varepsilon(p)$.

定理 13.27 $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f_k(x)=p_k,\ k=1,2,\cdots,m.$$

证： $|f_k(x)-p_k|\le\|f(x)-p\|\le\sum\limits_{i=1}^{m}|f_i(x)-p_i|,\quad k=1,2,\cdots,m$. □

定理 13.28（映射极限的线性运算和内积运算） 设f,g是从非空点集$D\subset\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的映射，a是D的极限点，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$是常数. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=p,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=q$，则

(1) $\lim\limits_{x\to a}[\lambda f(x)+\mu g(x)]=\lambda p+\mu q$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}<f(x),\ g(x)>=<p,q>$.

证：（略）.

定义 13.19 设 f 是从非空点集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射，$a\in D$. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in D\cap B_\delta(a)$，成立 $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$，则称 f 在 a 处连续，或 a 是 f 的连续点；若 f 在 D 中的每个点处都连续，则称 f 在 D 上连续，或 f 是从 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射.

定义 13.19′ 映射 f 在 a 处连续 $\Leftrightarrow\forall B_\varepsilon(f(a)),\exists B_\delta(a)$，使得 $\forall x\in D\cap B_\delta(a)$，成立 $f(x)\in B_\varepsilon(f(a))$.

命题 映射 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 在 a 处连续 $\Leftrightarrow$ 每个函数 f_k 在 a 处连续，$\forall k=1,2,\cdots,m$.

定理 13.29 若 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是非空开（闭）集，则映射 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 连续 $\Leftrightarrow\forall$ 开（闭）集 $G\subset\mathbb{R}^m$，$f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开（闭）集.

证：当 D 是开集时，证明很容易. 这里仅证 D 是闭集的情形. "$\Leftarrow$". $\forall a\in D$，要证 f 在 a 处连续. $\forall\varepsilon>0, f^{-1}\left([B_\varepsilon(f(a))]^c\right)$ 是闭集，$a\notin f^{-1}\left([B_\varepsilon(f(a))]^c\right)$，故 $\exists\delta>0$ 使得 $B_\delta(a)\cap f^{-1}\left([B_\varepsilon(f(a))]^c\right)=\varnothing$，于是 $f\left(D\cap B_\delta(a)\right)\subset B_\varepsilon(f(a))$. 这说明 f 在 a 处连续. "$\Rightarrow$". 设 f 是连续映射.（反证法）假定 $G\subset\mathbb{R}^m$ 是闭集，而 $f^{-1}(G)$ 不是闭集，则存在 $\{x_i\}\subset f^{-1}(G)$ 收敛于 $a\notin f^{-1}(G)$. 注意，D 是闭集确保了 $a\in D$. 于是，$\{f(x_i)\}\subset G$ 收敛于 $f(a)\notin G$，这与 G 是闭集相矛盾. □

注记 有关多变量函数极限和连续的全部概念和结论（除去涉及到"次序"的那些）都能推广到多变量映射.

定理 13.30 若 f 是从非空紧致集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射，则 f 在 D 上一致连续.

定理 13.31 若 f 是从非空连通集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射, 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的连通点集.

定理 13.32 若 f 是从非空紧致集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射, 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集. 作为推论, f 在 D 上有界.

练习题 13.8(P_{105}) 2.

问　题 13.8(P_{105}) 1, 2, 3.