第 13 章　多变量函数的连续性

§13.1　n维 Euclid 空间

n维 Euclid 空间　在实向量空间$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):\ x_i\in\mathbb{R}\}$中规定内积$<x,y>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$后,便称$\mathbb{R}^n$为$n$维 Euclid 空间；称$<x,y>$为向量$x$与$y$的内积,$\|x\|=\sqrt{<x,x>}$为向量$x$的范数(或长度、模),$\|x-y\|$为点$x$与$y$之间的距离.(虽可形式上定义$n-1$个向量的外积,但几何意义减弱了许多)

显然有$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|(\lambda\in\mathbb{R})$,$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$,$\|\|x\|-\|y\|\|\le\|x\pm y\|$,$|<x,y>|=\|x\|\|y\|$.

两向量的夹角　若$x,y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$,则存在唯一的$\theta\in[0,\pi]$,使得$\cos\theta=\dfrac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$.称$\theta$为非零向量$x$与$y$之间的夹角.

两向量的正交　若$x,y\in\mathbb{R}^n$满足$<x,y>=0$,则称向量x与y正交.显然,零向量与任何向量正交.

坐标向量的记号　记

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_1=(0,1,\cdots,0),\ \cdots,\ e_n=(0,0,\cdots,1),$$

则$e_1,e_2,\cdots,e_n$是彼此正交的单位向量,即$<e_i,e_j>=\delta_{ij}$（Kronecker 符号）.$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,显然有$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$.

$\mathbb{R}^n$中的有界集　对于$a\in\mathbb{R}^n,r>0$,称$B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|<r\}$是$\mathbb{R}^n$中以$a$为中心以$r$为半径的开球；称$\overline{B_r(a)}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|\le r\}$是$\mathbb{R}^n$中以$a$为中心以$r$为半径的闭球.设$E\subset\mathbb{R}^n$,若存在$r>0$使得$E\subset B_r(0)$,则称$E$是$\mathbb{R}^n$中的有界集.

练习题 13.1（P_{74}）　2, 3, 4, 5.

§13.2 $\mathbb{R}^n$ 中点列的极限

定义 13.1 设$\{x_i\}$是$\mathbb{R}^n$中的点列, $a\in\mathbb{R}^n$. 若对任意给定的$\varepsilon>0$, 总存在$N\in\mathbb{N}^*$, 使得$\forall i>N$成立

$$\|x_i-a\|<\varepsilon \quad （即\ x_i\in B_\varepsilon(a)）,$$

则称点列$\{x_i\}$收敛于a, 或称点列$\{x_i\}$以a为极限. "$\{x_i\}$收敛于a" 这件事用数学符号表示成

$$\lim_{i\to\infty}x_i=a \quad 或 \quad x_i\to a\,(i\to\infty).$$

定义 13.1′ $\mathbb{R}^n$中的点列$\{x_i\}$收敛于$a\Leftrightarrow\lim\limits_{i\to\infty}\|x_i-a\|=0$.

定理 13.1(极限的线性运算和内积运算) 若$\mathbb{R}^n$中的点列$\{x_i\}$收敛于a, $\{y_i\}$收敛于b, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 则

(1) $\lim\limits_{i\to\infty}(\lambda x_i+\mu y_i)=\lambda a+\mu b$;

(2) $\lim\limits_{i\to\infty}<x_i,y_i>=<a,b>$.

证: (1) $\|(\lambda x_i+\mu y_i)-(\lambda a+\mu b)\|\le|\lambda|\|x_i-a\|+|\mu|\|y_i-b\|$;

(2) $|<x_i,y_i>-<a,b>|=|<x_i-a,b>+<a,y_i-b>+<x_i-a,y_i-b>|$

$\le\|b\|\|x_i-a\|+\|a\|\|y_i-b\|+\|x_i-a\|\|y_i-b\|$. □

定理 13.2 $\mathbb{R}^n$中的点列$\{x_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\}$收敛于$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 当且仅当对每个固定的$k, 1\le k\le n$, 数列$\{x_k^{(i)}\}$收敛于$a_k$.

证: $\left|x_k^{(i)}-a_k\right|\le\|x_i-a\|\le\sum\limits_{k=1}^n\left|x_k^{(i)}-a_k\right|$. □

定义 13.2 设$\{x_i\}$是$\mathbb{R}^n$中的点列. 若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当$i>N$时, $\forall p\in\mathbb{N}^*$都成立

$$\left|x_{i+p}-x_i\right|<\varepsilon,$$

则称$\{x_i\}$是 Cauchy 点列或基本点列. 显然, 收敛点列是基本点列.

命题 $\mathbb{R}^n$中的点列$\{x_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\}$是基本点列, 当且仅当对每个

固定的$k,1\le k\le n$,数列$\{x_k^{(i)}\}$是基本数列.

证: $\left|x_k^{(i+p)}-x_k^{(i)}\right|\le\left\|x_{i+p}-x_i\right\|\le\sum_{k=1}^{n}\left|x_k^{(i+p)}-x_k^{(i)}\right|$. □

定理 13.3(Cauchy 收敛原理) $\mathbb{R}^n$中的点列收敛的充要条件是它为基本点列.因此n维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$是完备的.

证: $\mathbb{R}^n$中的点列收敛$\Leftrightarrow$它的每个分量数列收敛$\Leftrightarrow$它的每个分量数列是基本数列$\Leftrightarrow$该点列是基本点列. □

定理 13.4(Bolzano-Weierstrass 列紧性定理) $\mathbb{R}^n$中的任意有界点列必有一个收敛子列.

证: 设$\{x_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\}$是$\mathbb{R}^n$中的有界点列,则其每个分量数列有界.故$\{x_1^{(i)}\}$有收敛子列$\{x_1^{(i_1)}\}$; $\{x_2^{(i_1)}\}$有收敛子列$\{x_2^{(i_2)}\}$; $\cdots$; $\{x_n^{(i_{n-1})}\}$有收敛子列$\{x_n^{(i_n)}\}$. 于是, $\{x_i\}$的子列$\{x_{i_n}=(x_1^{(i_n)},x_2^{(i_n)},\cdots,x_n^{(i_n)})\}$的每个分量数列$\{x_k^{(i_n)}\}$ ($1\le k\le n$)都收敛,从而子列$\{x_{i_n}\}$收敛. □

练习题 13.2(P_{77}) 5.

§13.3　$\mathbb{R}^n$ 中的开集和闭集

本节的目标是将实轴上的开区间和闭区间的概念推广到$\mathbb{R}^n$.

ε-邻域　设$a\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, 称$\mathbb{R}^n$中的开球$B_\varepsilon(a)$为点a的ε-邻域.

定义 13.3　设$E\subset\mathbb{R}^n$, $a\in E$. 若存在点a的某个ε-邻域$B_\varepsilon(a)\subset E$, 则称$a$是$E$的内点；$E$的内点的全体用$E^0$表示, 称为$E$的内部, 显然$E^0\subset E$, $E\subset G\Rightarrow E^0\subset G^0$；当$E^0=E$时, 称$E$是$\mathbb{R}^n$中的开集.

例 1　(a,b)是$\mathbb{R}$中的开集；$[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$均不是$\mathbb{R}$中的开集.

例 2　设$a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbb{R}^n$是有限个点, 则$\mathbb{R}^n\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是$\mathbb{R}^n$中的开集.

例 3　$\mathbb{R}^n$中的开球$B_r(a)$是$\mathbb{R}^n$中的开集；$\mathbb{R}^n$中的开球环$B_{r_2}(a)\setminus\overline{B_{r_1}(a)}$是$\mathbb{R}^n$中的开集($0<r_1<r_2<+\infty$)；$\mathbb{R}^n$中的闭球$\overline{B_r(a)}$不是$\mathbb{R}^n$中的开集.

例 4　$\mathbb{R}^2$中的第一象限$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1,x_2>0\}$是$\mathbb{R}^2$中的开集; $B_1(0)\bigcup\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_2=0\}$不是$\mathbb{R}^2$中的开集.

定理 13.5　$\forall E\subset\mathbb{R}^n$, E^0是$\mathbb{R}^n$中的开集.

证： 只需证$E^0\subset(E^0)^0$. 不妨设$E^0\neq\varnothing$. $\forall a\in E^0, \exists B_\varepsilon(a)\subset E$, 故$B_\varepsilon(a)=(B_\varepsilon(a))^0\subset E^0$, 即$a$是$E^0$的内点. 这说明$E^0\subset(E^0)^0$. □

定理 13.6　n维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$具有如下重要性质

(1) $\mathbb{R}^n$和$\varnothing$都是$\mathbb{R}^n$中的开集；

(2) 设I是指标集, $\{E_\alpha:\alpha\in I\}$是$\mathbb{R}^n$中的开集族, 则$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$是$\mathbb{R}^n$中的开集(任意多个开集的并是开集)；

(3) 设$E_1,E_2,\cdots,E_m$是有限个$\mathbb{R}^n$中的开集, 则$\bigcap\limits_{i=1}^{m}E_i$是$\mathbb{R}^n$中的开集(有限个开集的交是开集).

证: (1)显然.

(2) $\forall a\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha, \exists\alpha_0\in I$, 使得$a\in E_{\alpha_0}$, 故存在$B_\varepsilon(a)\subset E_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$. 这说

明 a 是 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 的内点, 即 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\subset(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha)^0$.

(3) $\forall a\in\bigcap_{i=1}^{m}E_i$，存在 $B_{\varepsilon_1}(a)\subset E_1,\cdots,B_{\varepsilon_m}(a)\subset E_m$. 令 $\varepsilon=\min_{1\le i\le m}\varepsilon_i>0$，则 $B_\varepsilon(a)\subset\bigcap_{i=1}^{m}E_i$，这说明 a 是 $\bigcap_{i=1}^{m}E_i$ 的内点, 即 $\bigcap_{i=1}^{m}E_i\subset(\bigcap_{i=1}^{m}E_i)^0$. □

补集(或余集)　对于点集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 称 $E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$ 是 E 的补集(或余集).

定义 13.4　对于 $F\subset\mathbb{R}^n$, 若 F^c 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则称 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集(注意, 一个点集不是闭集并不表明它是开集；反之亦然).

例 5　$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭集；$\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}^*\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集；$\mathbb{R}^n$ 中的闭球 $\overline{B_r(a)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集；单位圆周 $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2=1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

de Morgan 公式　设 I 是指标集, $\{E_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集族, 则

$$(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c,\quad (\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha^c.$$

证：(1) $\forall a\in(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c$，即 $\forall a\notin\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$，则必 $\exists\alpha_0\in I$ 使得 $a\notin E_{\alpha_0}$，故 $a\in E_{\alpha_0}^c\subset\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c$. 这说明 $(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c\subset\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c$. 另一方面, $\forall b\in\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c$，则 $\exists\beta_0\in I$ 使得 $b\in E_{\beta_0}^c$，即 $b\notin E_{\beta_0}$，故 $b\notin\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$，从而 $b\in(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c$. 这说明 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c\subset(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha)^c$.

(2) 利用第一个等式便得到 $(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha^c)^c=\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$，两边取补集就得到第二个等式. □

定理 13.7　n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 具有如下重要性质

(1) $\mathbb{R}^n$ 和 $\varnothing$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集；

(2) 设 I 是指标集, $\{F_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集族, 则 $\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集(任意多个闭集的交是闭集)；

(3) 设 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 是有限个 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则 $\bigcup_{i=1}^{m}F_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集(有限个闭集的并是闭集).

证: 由定理 13.6 和 de Morgan 公式. □

练习题 13.3(P_{83}) 6(1), 7(1), 8(2), 11.

问　题 13.3(P_{83}) 2, 3.

定义 13.5　设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$a\in\mathbb{R}^n$. 若 $\forall\delta>0$，a 的去心 δ-邻域 $B_\delta(a)\setminus\{a\}$ 总含有 E 中的点, 即 $\forall\delta>0, \exists x\in E$ 满足 $0<\|x-a\|<\delta$, 则称 a 是 E 的一个极限点(或凝聚点)；若 $a\in E$, 但 a 不是 E 的极限点, 则称 a 是 E 的孤立点.

例 6　$\overline{B_r(a)}\subset\mathbb{R}^n$ 中的每个点都是 $B_r(a)$ 的极限点; $\mathbb{R}^n$ 中的有限点集 E 没有极限点, 它中的每个点都是 E 的孤立点; $\mathbb{R}^n$ 中的每个点都是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点, $\mathbb{Q}^n$ 没有孤立点.

定理 13.8(极限点的其它刻画)

(1)　$a\in\mathbb{R}^n$ 是点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的极限点 $\Leftrightarrow\forall\delta>0$，$B_\delta(a)$ 中含有 E 的无穷多个点；

(2)　$a\in\mathbb{R}^n$ 是点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的极限点 $\Leftrightarrow\exists$ 彼此不同的点列 $\{x_i\}\subset E$ 收敛于 a.

定义 13.6　点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的极限点的全体用 E' 表示, 称为 E 的导(出)集；称 $\overline{E}=E\bigcup E'$ 为 E 的闭包. 显然, $E\subset G\Rightarrow E'\subset G', \overline{E}\subset\overline{G}$.

例 7　$B_r(a)\subset\mathbb{R}^n$ 的导集和闭包都是 $\overline{B_r(a)}$； $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ 的导集是 $\varnothing$, 闭包是 $\mathbb{N}$；$(\mathbb{Q}^n)'=\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$；$(a,b)'=[a,b], \overline{(a,b)}=[a,b], \{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}^*\}'=\{0\}$.

定理 13.9　点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集 $\Leftrightarrow E'\subset E\Leftrightarrow E=\overline{E}$.

证: “$\Rightarrow$”. 若 E 是闭集, 即 E^c 是开集, 则显然 E^c 中每个点都不是 E 的极限点, 故 E 的极限点一定在 E 中, 从而 $E'\subset E$. “$\Leftarrow$”. 若 $E'\subset E$, 则 E^c 中每个点都不是 E 的极限点, 故 $\forall a\in E^c, \exists B_\delta(a)$ 使得 $B_\delta(a)\bigcap E=\varnothing\Rightarrow B_\delta(a)\subset E^c$, 这说明 E^c 是开集. □

定理 13. 9′ 点集$E\subset\mathbb{R}^n$是闭集$\Leftrightarrow\forall$收敛点列$\{x_i\}\subset E$，其极限$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a\in E$.

证：“$\Rightarrow$”. 若E是闭集(即$E'\subset E$)，$\{x_i\}\subset E$收敛于a，则$\forall\varepsilon>0$，$B_\varepsilon(a)$中都含有E的点，从而$a\in E\bigcup E'=E$. “$\Leftarrow$”. $\forall a\in E'$，$\exists$彼此不同的点列$\{x_i\}\subset E$收敛于$a\in E$(定理 13.8 和条件)，故$E'\subset E$，从而E是闭集. □

定理 13. 10 $\forall E\subset\mathbb{R}^n$，$E'$和$\overline{E}$都是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

证：$\forall a\in(E')^c$，$\exists\delta>0$使得$B_\delta(a)\setminus\{a\}$不含$E$中的点，从而$B_\delta(a)\setminus\{a\}$中每个点都不是$E$的极限点，故$B_\delta(a)\subset(E')^c$. 这说明$(E')^c$是开集，即$E'$是闭集. 设$a$是$\overline{E}=E\bigcup E'$的极限点，则$a$的任意去心邻域$B_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$都含有$E$的点或$E'$的点，故$a\in E'$或$a\in(E')'\subset E'$. 这说明$(\overline{E})'\subset E'\subset\overline{E}$，即$\overline{E}$是闭集. □

推论 13. 10′ $\forall E\subset\mathbb{R}^n$，$E$和$\overline{E}$具有相同的导集，都是$E'$.

定理 13. 11 $\forall E\subset\mathbb{R}^n$，$E^0$是包含在$E$内的最大开集；$\overline{E}$是包含着$E$的最小闭集.

证：$\forall$开集$G\subset E$，有$G=G^0\subset E^0$；$\forall$闭集$F\supset E$，有$F=\overline{F}\supset\overline{E}$. □

定义 13. 7 设$E\subset\mathbb{R}^n$，$a\in E^c$. 若存在点a的某个ε−邻域$B_\varepsilon(a)\subset E^c$，则称$a$是$E$的外点；$E$的外点的全体恰好是$(E^c)^0$，称为$E$的外部；称$\mathbb{R}^n$中既不是$E$的内点也不是$E$的外点的点为$E$的边界点；$E$的边界点的全体用$\partial E$表示，称为$E$的边界. 于是，利用点集$E$，便可将$\mathbb{R}^n$分成$E$的内部、外部和边界这三个互不相交的部分.

例 8 $\partial B_r(a)=\partial\overline{B_r(a)}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|=r\}$；若$E\subset\mathbb{R}^n$是有限集，则$E^0=\varnothing$，$(E^c)^0=E^c$，$\partial E=E$；$(\mathbb{Q}^n)^0=[(\mathbb{Q}^n)^c]^0=\varnothing$，$\partial(\mathbb{Q}^n)=\mathbb{R}^n$；$(\overline{\mathbb{Q}^n})^0=\mathbb{R}^n$，$[(\overline{\mathbb{Q}^n})^c]^0=\varnothing$，$\partial(\overline{\mathbb{Q}^n})=\varnothing$；$\partial(a,b)=\partial[a,b)=\partial(a,b]=\partial[a,b]=\{a,b\}$.

命题 1(边界点的另一刻画) 设$E\subset\mathbb{R}^n$, 则$a\in\partial E\Leftrightarrow\forall\delta>0$, 都有$B_\delta(a)\bigcap E\neq\varnothing,\ B_\delta(a)\bigcap E^c\neq\varnothing$.

证: "$\Rightarrow$". 设$a\in\partial E$. (反证法)若$B_\delta(a)\bigcap E=\varnothing$, 则$B_\delta(a)\subset E^c$, 即$a$是$E$的外点；若$B_\delta(a)\bigcap E^c=\varnothing$, 则$B_\delta(a)\subset E$, 即$a$是$E$的内点. 这两种情形都与$a$是$E$的边界点相矛盾. "$\Leftarrow$". $B_\delta(a)\bigcap E^c\neq\varnothing\Rightarrow a$不是$E$的内点；$B_\delta(a)\bigcap E\neq\varnothing\Rightarrow a$不是$E$的外点, 故$a\in\partial E$. □

命题 2(边界的基本性质) 设$E\subset\mathbb{R}^n$, 则

(1) ∂E是$\mathbb{R}^n$中的闭集；

(2) $\partial E\subset\overline{E}$；

(3) E是$\mathbb{R}^n$中的闭集$\Leftrightarrow\partial E\subset E$.

证: (1) $\partial E=\mathbb{R}^n\setminus[E^0\bigcup(E^c)^0]$.

(2) $(\overline{E})^c\subset E^c$是开集, 故$(\overline{E})^c\subset(E^c)^0$, 从而 $\partial E\subset\mathbb{R}^n\setminus(E^c)^0\subset\mathbb{R}^n\setminus(\overline{E})^c$ $=\overline{E}$.

(3) "$\Rightarrow$". 若E是闭集, 由(2)便知$\partial E\subset\overline{E}=E$. "$\Leftarrow$". 若$\partial E\subset E$, 则$E^c$中每个点既不是$E$的内点也不是$E$的边界点, 从而必是$E$的外点. 这说明$E^c$是开集, 即$E$是闭集. □

$\mathbb{R}^n$中非空点集的直径 设$E\subset\mathbb{R}^n, E\neq\varnothing$, 则称

$$diam(E)=\sup\{\|x-y\|:x,y\in E\}$$

为点集E的直径. 显然, E是$\mathbb{R}^n$中的有界集$\Leftrightarrow diam(E)<+\infty$；$E$是$\mathbb{R}^n$中的独点集$\Leftrightarrow E$非空且$diam(E)=0$.

定理 13.12(闭集套定理) 若$\mathbb{R}^n$中的非空闭集列$\{F_i\}$满足递减的包含关系$F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots$, 并且$\lim\limits_{i\to\infty}diam(F_i)=0$, 则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F_i$是独点集$\{a\}$.

证: $\forall i\in\mathbb{N}^*$, 取$x_i\in F_i$. 先证$\{x_i\}$是基本列. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$满足$diam(F_N)<\varepsilon$. $\forall i>N,\ p\in\mathbb{N}^*$, 有$x_i,x_{i+p}\in F_N$, 故$\|x_{i+p}-x_i\|<\varepsilon$. 这说明$\{x_i\}$是基本

列, 从而极限$\lim\limits_{i\to\infty} x_i = a$存在. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, F_i是闭集且$\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots\} \subset F_i$, 故$a \in F_i$ (定理 13. 9′). 于是, $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$. 由$diam(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, 可知$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$是独点集$\{a\}$. □

练习题 13. 3(P_{83}) 1, 2, 3, 4, 5, 6(2), 7(2), 8(1), 10.

问　题 13. 3(P_{83}) 1.

§13.4　$\mathbb{R}^n$ 中的列紧集和紧致集

定义 13.8　设$E\subset\mathbb{R}^n$. 若$\forall$点列$\{x_i\}\subset E$, 都存在其子列$\{x_{k_i}\}$收敛于E中的点, 则称E是$\mathbb{R}^n$中的列紧集.

定理 13.13　$\mathbb{R}^n$中的点集是列紧集当且仅当它是有界闭集.

证: "当". 若$E\subset\mathbb{R}^n$是有界闭集, 则$\forall\{x_i\}\subset E$, 存在其子列$\{x_{k_i}\}$收敛于$a\in\mathbb{R}^n$, 并且$a\in E$ (定理 13.4 和 13.9′).

"仅当". (反证法) 若E是列紧集而无界, 则$\exists\{x_i\}\subset E$满足$\|x_i\|>i$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$, 从而$\{x_i\}$没有收敛子列, 这与E是列紧集相矛盾; 若E是列紧集而非闭, 则$\exists\{x_i\}\subset E$收敛于$a\notin E$, 从而$\{x_i\}$没有任何子列收敛于E中的点, 这也与E是列紧集相矛盾. □

定义 13.9　设I是指标集, $J=\{G_\alpha:\alpha\in I\}$是$\mathbb{R}^n$中的开集族. 若$\mathbb{R}^n$中的点集$E\subset\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$, 则称开集族$J$覆盖了$E$, 或开集族$J$是$E$的一个开覆盖.

引理(开覆盖的 Lebesgue 数)　若$\mathbb{R}^n$中的开集族J覆盖了有界闭集E, 则必存在$\sigma>0$, 使得$\forall S\subset\mathbb{R}^n$, 只要$S\bigcap E\neq\varnothing$, $diam(S)<\sigma$, 就一定有J中的开集$G\supset S$. 称σ为开覆盖J的 Lebesgue 数.

证: (反证法) 假定结论不成立, 则$\forall i\in\mathbb{N}^*$, $\exists S_i\subset\mathbb{R}^n$满足$S_i\bigcap E\neq\varnothing$, $diam(S_i)<\dfrac{1}{i}$, 使得S_i不能被J中的任何一个开集所包含.

$\forall i\in\mathbb{N}^*$, 取$x_i\in S_i\bigcap E$, 则点列$\{x_i\}$有子列$\{x_{k_i}\}$收敛于$a\in E$. 有J中的开集G包含a, 再取$B_\varepsilon(a)\subset G$. $\exists m\in\mathbb{N}^*$足够大使得$\|x_{k_m}-a\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$和$diam(S_{k_m})<\dfrac{1}{k_m}<\dfrac{\varepsilon}{2}$同时成立. $\forall x\in S_{k_m}$, 有$\|x-a\|\le\|x-x_{k_m}\|+\|x_{k_m}-a\|\le diam(S_{k_m})+\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 这说明$S_{k_m}\subset B_\varepsilon(a)\subset G$, 从而得到矛盾. □

定义 13.10　设$E\subset\mathbb{R}^n$. 若对于E的任何开覆盖J, 都能从J中选出有

限个开集，使得这有限个开集所组成的新开集族仍然覆盖了 E，则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧(致)集.

定理 13.14(Heine-Borel 有限覆盖定理) $\mathbb{R}^n$ 中的点集是紧集当且仅当它是有界闭集.

证： “当”. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集，J 是 E 的开覆盖，$\sigma>0$ 是 J 的 Lebesgue 数. 将 E 分成有限个非空子集 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 之并，使得 $diam(E_i)<\sigma\ (1\le i\le m)$，则存在 J 中的开集 $G_1\supset E_1,G_2\supset E_2,\cdots,G_m\supset E_m$. 于是新开集族 $\{G_i:\ i=1,2,\cdots,m\}$ 仍然覆盖了 E，即 E 是紧集.

“仅当”. 设 E 是紧集. 因为可以从它的开覆盖 $\{B_i(0):\ i\in\mathbb{N}^*\}$ 中选出有限个开球仍然覆盖住 E，故 E 是有界集；(反证法)若 E 不是闭集，则 $\exists a\in E'$，使得 $a\notin E$. 因为开球环族 $\{(\overline{B_{\frac{1}{i}}(a)})^c:\ i\in\mathbb{N}^*\}$ 是 E 的开覆盖，故可从中选出有限个开球环覆盖住 E，其中最大的那个开球环 $(\overline{B_{\frac{1}{m}}(a)})^c$ 就能覆盖住 E. 这与 $a\in E'$ 相矛盾. □

推论 13.14′ $\mathbb{R}^n$ 中的点集是紧集当且仅当它是列紧集.

练习题 13.4(P_{87}) 1, 2, 5.

§13.5　$\mathbb{R}^n$ 中点集的连通性

定义 13.11　设$E\subset\mathbb{R}^n$. 若对于任意非空无交并分解$E=A\cup B$，$A\cap B'$和$A'\cap B$中至少有一个非空, 则称E是$\mathbb{R}^n$中的连通点集. 空集和独点集都是连通点集.

定义 13.12　称$\mathbb{R}^n$中的连通开集为$\mathbb{R}^n$中的(区)域；称(区)域的闭包为闭(区)域.

定理 13.15　$\mathbb{R}^n$中的开(闭)集是连通集当且仅当它不能分解成两个非空开(闭)集的无交并.

证:“当”. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是开(闭)集, 它不能分解成两个非空开(闭)集的无交并. (反证法)假定E不连通, 则有非空无交并分解$E=A\cup B$, 使得$A\cap B'=\varnothing, A'\cap B=\varnothing$. 当$E$是开集时, $A=E\setminus\overline{B}=E\cap(\overline{B})^c$和$B=E\setminus\overline{A}=E\cap(\overline{A})^c$是开集, 得到矛盾；当$E$是闭集时, $A'\subset E\setminus B=A$, $B'\subset E\setminus A=B$, 从而A和B是闭集, 也得到矛盾.

“仅当”. (反证法)设$E\subset\mathbb{R}^n$是连通开(闭)集. 假定它有非空开(闭)集的无交并分解$E=A\cup B$, 则显然$A\cap B'=\varnothing, A'\cap B=\varnothing$, 这与$E$是连通集相矛盾. □

定理 13.16　$E\subset\mathbb{R}$是连通点集当且仅当E是$\mathbb{R}$中的区间.

证: “当”. 设E是$\mathbb{R}$中的区间. 对于非空无交并分解$E=A\cup B$, 取$a\in A$, $b\in B$, 不妨设$a<b$. 令$\beta=\sup(A\cap[a,b])\in[a,b]\subset E$. 当$\beta\in B$时, 必有$\beta\in A'$, 从而$A'\cap B\neq\varnothing$；当$\beta\in A$时, 必有$(\beta,b]\subset B, \beta\in B'$, 从而$A\cap B'=\varnothing$. 这说明$E$连通.

“仅当”. 设E连通. (反证法)假定E不是区间, 则$\exists a<c<b$, 使得$a,b\in E$, 但$c\notin E$. 故有非空无交并分解$E=[E\cap(-\infty,c)]\cup[E\cap(c,+\infty)]=A\cup B$, A中每个点不是B的极限点, B中每个点也不是A的极限点, 即$A\cap B'=\varnothing$, $A'\cap B=\varnothing$. 这与E连通相矛盾, 故E是$\mathbb{R}$中的区间. □

定义 13.13 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 $\forall p,q\in E$, 总存在 E 中的曲线 γ 连接 p 和 q（即存在连续映射 γ: $[\alpha,\beta]\to E$ 满足 $\gamma(\alpha)=p,\gamma(\beta)=q$）, 则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的道路连通点集. 空集也被认为是道路连通点集.

定理 13.17 $\mathbb{R}^n$ 中的道路连通点集一定是连通点集.

证: 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 道路连通. 对于任意非空无交并分解 $E=A\cup B$, 取 $p\in A$, $q\in B$, 曲线 $\gamma:[\alpha,\beta]\to E$ 连接 p 和 q. 记 $F=\{t\in[\alpha,\beta]:\ \gamma(t)\in A\}$, $G=\{t\in[\alpha,\beta]:\ \gamma(t)\in B\}$, 则 $[\alpha,\beta]=F\cup G$ 是非空无交并分解, 故 $F\cap G'$ 和 $F'\cap G$ 至少有一个非空. 不妨设 $c\in F\cap G'$, 取 $\{t_i\}\subset G$ 收敛于 $c\in F$, 则 $\{\gamma(t_i)\}\subset B$ 收敛于 $\gamma(c)\in A$. 由于 $\gamma(c)\in B'$, 故 $A\cap B'\neq\varnothing$. 这说明 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通点集.

例 $\mathbb{R}^n$ 、$B_r(a)$ 和 $\overline{B_r(a)}$ 都是连通点集.

定理 13.17′ 开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是连通的(即为区域) $\Leftrightarrow G$ 是道路连通的.

证: “$\Leftarrow$”. 由定理 13.17 即知. “$\Rightarrow$”. (反证法)设 G 是区域而不道路连通, 则 $\exists p,q\in G$ 不能用 G 中的曲线相连接. 令 $A=\{x\in G$: 存在 G 中的曲线连接 p 和 $x\}$, $B=\{x\in G$: 不存在 G 中的曲线连接 p 和 $x\}$. 显然 A,B 都是非空开集, $A\cap B=\varnothing$, $G=A\cup B$. 这与 G 是连通开集相矛盾(定理 13.15). □

定理 13.17″ 开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是连通的(即为区域) $\Leftrightarrow G$ 是折线连通的.

$\mathbb{R}^n$ 中的单连通(区)域 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是区域. 若 G 中的任意一条简单闭曲线 γ 都能在 G 中“连续”地收缩成一点, 则称 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单连通(区)域.

练习题 13.5（P_{90}） 3.

问　题 13.5（P_{90}） 1, 2.

§13.6 多元函数的极限

定义 13.14 设$D\subset\mathbb{R}^n$非空. 称映射$f:D\to\mathbb{R}$为D上的n元函数；D为函数f的定义域，$f(D)$为函数f的值域；也说$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$D$上的($n$元)函数.

定义 13.15 设f是非空点集$D\subset\mathbb{R}^n$上的函数，a是D的极限点，$l\in\mathbb{R}$是常数. 若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$\forall x\in D, 0<\|x-a\|<\delta$，成立$|f(x)-l|<\varepsilon$，则称当$x\to a$时$f(x)$趋向于$l$；或称当$x\to a$时$f$有极限$l$；或称当$x\to a$时$f$以$l$为极限；或称$f$在$a$处有极限$l$. "当$x\to a$时$f$有极限$l$"这件事用数学符号表示成

$$\lim_{x\to a}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\,(x\to a).$$

注记 13.15′ "当$x\to a$时f是否有极限"这件事与f是否在a处有定义无关，只与f在a的某个去心邻域$D\bigcap(B_\delta(a)\setminus\{a\})$上的定义有关($\delta_0$是固定的正数).

定理 13.18（函数极限与数列极限的关系） 设f是非空点集$D\subset\mathbb{R}^n$上的函数，a是D的极限点，$l\in\mathbb{R}$是常数. 那么，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\{x_i\}\subset D\setminus\{a\}$，$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$，总成立$\lim\limits_{i\to\infty}f(x_i)=l$.

证："$\Rightarrow$". 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，$\{x_i\}\subset D\setminus\{a\}$，$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$\forall x\in D,\ 0<\|x-a\|<\delta$，成立$|f(x)-l|<\varepsilon$；$\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得$\forall i>N$，成立$0<\|x_i-a\|<\delta$. 故$\forall i>N$，成立$|f(x_i)-l|<\varepsilon$. 这说明成立$\lim\limits_{i\to\infty}f(x_i)=l$.

"$\Leftarrow$". (反证法)假定$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$不成立，即$\exists\varepsilon>0$，使得$\forall i\in\mathbb{N}^*$，都$\exists x_i\in D$，满足$0<\|x_i-a\|<\dfrac{1}{i}$和$|f(x_i)-l|\geq\varepsilon$. 这便与条件$\lim\limits_{i\to\infty}f(x_i)=l$相矛盾. □

定理 13.19 和定理 13.20 与单变量函数一样, 多变量函数极限的唯一性、比较原理、四则运算性质、复合运算性质、局部有界性、局部不变号等结论都成立.

定理 13.21 (Cauchy 收敛原理) 设 f 是非空点集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数, a 是 D 的极限点, 则极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in D \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$, 成立 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

证: (略) □

多变量函数的广义极限 与单变量函数一样, 多变量函数也能定义如下形状的广义极限

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$, $l = \pm\infty, \infty$;

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$, 其中 $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty, \infty$.

多变量函数的上极限和下极限 与单变量函数一样, 多变量函数也能定义上极限和下极限

(1) $\limsup\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\{f(x):\ x \in D, 0 < \|x - a\| < \delta\}$;

(2) $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \inf\{f(x):\ x \in D, 0 < \|x - a\| < \delta\}$.

例 (1) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$; (2) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在.

解: (1) $\left| \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \le \dfrac{\|(x,y)\|^2}{4}$, $\delta = 2\sqrt{\varepsilon}$;

(2) 分别取 $(x_i, y_i) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ 和 $(\frac{1}{i}, 0)$;

(3) 分别取 $(x_i, y_i) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2})$ 和 $(\frac{1}{i}, 0)$.

练习题 13.6 (P_{94}) 1(3, 5, 6), 2(1, 3), 3(2, 5), 5(1, 3), 6, 7.