第 8 章　曲线的表示

曲线是最重要的数学术语之一(复变函数、微分几何、拓扑、流形等课程的需要；为多元微积分做准备；本身也是重要的研究对象).

§8.1　参数曲线

定义 8.1　若$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是连续映射, 即$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$的三个分量函数$x(t),y(t),z(t)$都是$[\alpha,\beta]$上的连续函数, 则称连续映射$\gamma$是$\mathbb{R}^3$中的一条曲线；称$\gamma(\alpha)$为曲线$\gamma$的起点, $\gamma(\beta)$为曲线γ的终点；在不发生混淆时, 也称$\gamma([\alpha,\beta])$为曲线.

定义 8.1′　设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是曲线, $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$也是曲线. 若存在$[a,b]$上严格递增的连续函数$\varphi$将$[a,b]$映成$[\alpha,\beta]$, 并且满足$\Gamma=\gamma\circ\varphi$, 则称$\Gamma$与$\gamma$是同一条曲线, 也称$\Gamma$是曲线$\gamma$的另一参数表示; 令$\gamma^{-}(t)=\gamma[t\alpha+(1-t)\beta]\ (0\le t\le 1)$, 则称另一条曲线$\gamma^{-}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$为曲线$\gamma$的逆向曲线.

例 1　设$\Gamma(t)\,(a\le t\le b)$与$\gamma(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的同一条曲线, 则

$$\Gamma([a,b])=\gamma([\alpha,\beta])=\gamma^{-}([0,1]).$$

例 2　设$y=f(x)$是$[a,b]$上的连续函数, 则也可将它视为一条$\mathbb{R}^2$中的曲线$\gamma(t)=(t,f(t))\ (a\le t\le b)$.

例 3　对于 2 元函数$F(x,y)$, 若存在$\mathbb{R}^2$中的曲线$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$使得$\gamma([\alpha,\beta])=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:F(x,y)=0\}$, 则可将$F(x,y)=0$视为一条平面曲线的方程；对于3元函数$F(x,y,z)$和$G(x,y,z)$, 若存在$\mathbb{R}^3$中的曲线$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$使得$\gamma([\alpha,\beta])=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0\}$, 则可将$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$视为一条空间曲线的方程. 称$\gamma$为所论及的曲线的参数表示.

例 4（椭圆） 平面曲线$\gamma(t)=(a\cos t,b\sin t)\,(0\le t\le 2\pi)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的参数表示, 其中$a,b>0$是常数.

例 5（螺纹线） 空间曲线$\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)\,(\alpha\le t\le\beta)$是以$a$为半径、以$2\pi b$为螺距的螺纹线, 其中$a,b>0$是常数.

定义 8. 1″ 设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是曲线. 若$\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, 则称$\gamma$是闭曲线; 若$\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1\ne t_2$, 总有$\gamma(t_1)\ne\gamma(t_2)$, 则称$\gamma$是简单曲线(或 Jordan 曲线); 若$\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta)$, $t_1\ne t_2$, 总有$\gamma(t_1)\ne\gamma(t_2)$, 并且$\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, 则称$\gamma$是简单闭曲线(或 Jordan 闭曲线).

定义 8. 1‴ 设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是曲线, π是$[\alpha,\beta]$的分割, 其分点为$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, 则以$\gamma(t_k)\,(k=0,1,\cdots,n)$为顶点的折线的长度是

$$s(\gamma,\pi)=\sum_{k=1}^{n}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|.$$

若$s(\gamma)=\sup\{s(\gamma,\pi):\pi\text{ 是}[\alpha,\beta]\text{的分割}\}<+\infty$, 则称$\gamma$是可求长曲线, 具有长度$s(\gamma)$.

命题 1 设γ是可求长曲线, Γ与γ同一条曲线, 则$s(\Gamma)=s(\gamma)=s(\gamma^-)$, 即曲线的长度与它的参数表示和方向无关.

证: 由曲线γ的长度$s(\gamma)$的定义. □

命题 2 设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是可求长简单(闭)曲线, 其长度为$L$, 则存在$\gamma$的另一参数表示$\Gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^3$, 具有性质: $\forall s_0\in(0,L]$, 曲线$\Gamma|_{[0,s_0]}$的长度恰为s_0. 称Γ是γ的自然参数表示. (注意: 一般的可求长曲线未必有自然参数表示)

证: 定义一个$[\alpha,\beta]$上严格递增的连续函数φ如下:

$$\varphi(t)=\begin{cases} s(\gamma|_{[0,t]}), & t\in(\alpha,\beta];\\ 0, & t=\alpha.\end{cases}$$

显然φ^{-1}是$[0,L]$上严格递增的连续函数, 将$[0,L]$映成$[\alpha,\beta]$, 故

$\Gamma=\gamma\circ\varphi^{-1}$ 是 γ 的另一参数表示. $\forall s_0\in(0,L]$, 令 $t_0=\varphi^{-1}(s_0)$，则 φ^{-1} 将 $[0,s_0]$映成 $[\alpha,t_0]$, 故$\Gamma|_{[0,s_0]}$是$\gamma|_{[\alpha,t_0]}$的另一参数表示. 于是,

$$s_0=\varphi(t_0)=s(\gamma|_{[\alpha,t_0]})=s(\Gamma|_{[0,s_0]}).\ \square$$

注记　存在这样的病态曲线$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, 它的像$\gamma([0,1])$恰好是单位正方体$[0,1]^3$. (Peano 曲线)

练习题 8.1（P_{317}） 1, 3.

§8.2 曲线的切向量

定义 8.2 设$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的曲线. 若$x(t),y(t)$, $z(t)$都是$[\alpha,\beta]$上的C^k $(k\in\mathbb{N}^*)$函数, 则称γ是$\mathbb{R}^3$中的C^k曲线；若γ是$\mathbb{R}^3$中的C^1曲线, 并且满足$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{|x'(t)|^2+|y'(t)|^2+|z'(t)|^2}>0, \forall t\in[\alpha,\beta]$, 则称$\gamma$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线.

定义 8. $2'$ 设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是光滑（或$C^k$）曲线, $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$也是光滑（或$C^k$）曲线. 若存在$[a,b]$上导数恒正的$C^1$（或严格递增的$C^k$）函数$\varphi$将$[a,b]$映成$[\alpha,\beta]$, 并且满足$\Gamma=\gamma\circ\varphi$, 则称$\Gamma$与$\gamma$是同一条光滑（或$C^k$）曲线, 也称$\Gamma$是光滑（或$C^k$）曲线$\gamma$的另一参数表示.

命题 设$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\ (\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线, $t_0\in[\alpha,\beta]$, 则$\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$是曲线$\gamma$在$\gamma(t_0)$处的切向量, 并且与$\gamma$的描绘方向一致；曲线$\gamma$在$\gamma(t_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)};$$

曲线γ在$\gamma(t_0)$处的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$$

证明: 由于向量$\dfrac{\gamma(t_0+\Delta t)-\gamma(t_0)}{\Delta t}$与通过$\gamma(t_0)$和$\gamma(t_0+\Delta t)$的$\gamma$的割线平行, 故$\gamma'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\gamma(t_0+\Delta t)-\gamma(t_0)}{\Delta t}$是曲线$\gamma$在$\gamma(t_0)$处的切向量. □

练习题 8.2（P_{321}） 1, 4, 5, 6, 7, 8.

§8.3 光滑曲线的弧长

定理 8.1 若$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\,(\alpha\le t\le\beta)$是$\mathbb{R}^3$中的光滑曲线, 则它一定可求长, 其长度为

$$s(\gamma)=\int_\alpha^\beta\|\gamma'(t)\|dt.$$

称$\|\gamma'(t)\|dt$和$\gamma'(t)dt$为γ在$\gamma(t)$处的弧长元素和有向弧长元素.

证: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得$\forall\tau_1,\tau_2\in[\alpha,\beta],|\tau_1-\tau_2|<\delta$, 成立

$$|x'(\tau_1)-x'(\tau_2)|,\quad |y'(\tau_1)-y'(\tau_2)|,\quad |z'(\tau_1)-z'(\tau_2)|<\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}.$$

设π是$[\alpha,\beta]$的分割, 其分点为$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$. 取$\xi_k,\eta_k,\zeta_k\in(t_{k-1},t_k)$使得

$$\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})=\begin{pmatrix}x(t_k)-x(t_{k-1})\\ y(t_k)-y(t_{k-1})\\ z(t_k)-z(t_{k-1})\end{pmatrix}=(t_k-t_{k-1})\begin{pmatrix}x'(\xi_k)\\ y'(\eta_k)\\ z'(\zeta_k)\end{pmatrix}$$

$$=(t_k-t_{k-1})\begin{pmatrix}x'(\xi_k)-x'(t_{k-1})\\ y'(\eta_k)-y'(t_{k-1})\\ z'(\zeta_k)-z'(t_{k-1})\end{pmatrix}+(t_k-t_{k-1})\begin{pmatrix}x'(t_{k-1})\\ y'(t_{k-1})\\ z'(t_{k-1})\end{pmatrix}.$$

故
$$\begin{aligned}&\big|\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|-\|\gamma'(t_{k-1})\|(t_k-t_{k-1})\big|\\ &\le|x'(\xi_k)-x'(t_{k-1})|(t_k-t_{k-1})+|y'(\eta_k)-y'(t_{k-1})|(t_k-t_{k-1})\\ &+|z'(\zeta_k)-z'(t_{k-1})|(t_k-t_{k-1}).\end{aligned}$$

当$\|\pi\|<\delta$时便有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^n\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|-\sum_{k=1}^n\|\gamma'(t_{k-1})\|(t_k-t_{k-1})\right|\\ &\le\sum_{k=1}^n\big|\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|-\|\gamma'(t_{k-1})\|(t_k-t_{k-1})\big|\\ &\le\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}(t_k-t_{k-1})+\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}(t_k-t_{k-1})\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}(t_k-t_{k-1})=\varepsilon\,.$$

令$\|\pi\|\to 0$便得到 $\left|s(\gamma)-\int_{\alpha}^{\beta}\|\gamma'(t)\|dt\right|\le\varepsilon$, 故$s(\gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\|\gamma'(t)\|dt$. □

命题 设$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$是光滑曲线. 定义一个$[\alpha,\beta]$上导数恒正的$C^1$函数$\varphi(t)=\int_{\alpha}^{t}\|\gamma'(\tau)\|d\tau$, 显然$\varphi^{-1}$是$[0,s(\gamma)]$上导数恒正的$C^1$函数, 将$[0,s(\gamma)]$映成$[\alpha,\beta]$. 于是

(1) $\Gamma=\gamma\circ\varphi^{-1}$与$\gamma$是同一条光滑曲线;

(2) Γ在$\Gamma(s)$处的弧长元素为ds, 即$\Gamma'(s)$是Γ在$\Gamma(s)$处的单位切向量;

(3) Γ恰为γ的自然参数表示.

证: (1)已知.

(2). 对于$t\in[\alpha,\beta]$, 记$s=\varphi(t)\in[0,s(\gamma)]$, 则有

$$\Gamma'(s)=\gamma'[\varphi^{-1}(s)]\left(\varphi^{-1}\right)'(s)=\frac{\gamma'[\varphi^{-1}(s)]}{\varphi'[\varphi^{-1}(s)]}=\frac{\gamma'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

(3). $\forall s_0\in(0,s(\gamma)]$, $s_0=\int_0^{s_0}ds=\int_0^{s_0}\|\Gamma'(s)\|ds=s(\Gamma|_{[0,s_0]})$. 这说明$\Gamma$是$\gamma$的自然参数表示. □

练习题 8.3(P_{326}) 1(1, 6, 8), 2, 3, 5.