§7.7 广义积分

本节的目标是推广 Riemann 积分的定义,使其适合于无限区间和无界函数的情形.

1、无穷积分 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的函数. 若 f 在任何有限闭区间 $[a,b]$ 上可积, 则称形式积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为无穷积分(类似的, 还有 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 这两种形式的无穷积分).

无穷积分的收敛 若存在有限极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 并用 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 表示这个有限极限; 若不存在有限极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散(类似的, 可定义 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 这两种形式的无穷积分的敛散性).

注记 1 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时, 它有两个含义: 一是形式积分; 二是 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 这个数.

2、瑕积分 设 f 是 $(a,b]$ 上的函数. 若 f 在任何有限闭区间 $[a+\varepsilon,b]\subset(a,b]$ 上可积, 则称形式积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是以 a 为瑕点的瑕积分(类似的, 还有以 b 为瑕点和同时以 a,b 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$).

瑕积分的收敛 若存在有限极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, 则称以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 并用 $\int_a^b f(x)dx$ 表示这个有限极限; 若不存在有限极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, 则称以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散(类似的, 可定义以 b 为瑕点和同时以 a,b 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的敛散性).

注记 2 当 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时, 它有两个含义: 一是形式积分; 二是 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 这个数.

定理 7.18 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 或 $(a,b]$ 上有原函数 F. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

或以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) \text{ 或 } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a+).$$

证: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)] = F(+\infty)-F(a)$. □

命题 1 对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, 若当 $x\in[a,+\infty)$ 充分大时成立 $|f(x)|\le g(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

证: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 存在有限极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_a^y g(x)dx \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A\ge a$, 使得 $\forall y_1, y_2 > A, y_1<y_2$, 成立 $\left|\int_a^{y_2} g(x)dx - \int_a^{y_1} g(x)dx\right| = \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$ (Cauchy 收敛原理). 不妨设当 $x>A$ 时成立 $|f(x)|\le g(x)$. 于是, $\forall y_1, y_2>A, y_1<y_2$, 成立 $\left|\int_a^{y_2} f(x)dx - \int_a^{y_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| \le \int_{y_1}^{y_2}|f(x)|dx \le \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx < \varepsilon$. 这说明存在有限极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)dx$. □

命题 2 对于以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b g(x)dx$, 若当 $x\in(a,b]$ 充分接近 a 时成立 $|f(x)|\le g(x)$, 则

$$\int_a^b g(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛}.$$

证: 类似于命题 1, 利用 Cauchy 收敛原理. □

例 1 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}<+\infty, & p>1;\\ =+\infty, & p\le 1.\end{cases}$

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\log x)^q}dx\begin{cases}<+\infty, & p>1, q\in\mathbb{R};\\ <+\infty, & p=1, q>1;\\ =+\infty, & p=1, q\le 1;\\ =+\infty, & p<1, q\in\mathbb{R}.\end{cases}$

证: (1) $\int_1^y \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^y = \frac{1}{1-p}(y^{1-p}-1) \to \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p<1\end{cases}(y\to+\infty)$.

$\int_1^y \frac{1}{x}dx = \log x\Big|_1^y = \log y \to +\infty\ (y\to+\infty)$.

(2) 当 $p>1$ 时, 可取 $\varepsilon>0$, 使得 $p>p-\varepsilon>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p(\log x)^q}\Big/\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\varepsilon}(\log x)^q}=0,$$

故当$x\in[2,+\infty)$充分大时成立$\dfrac{1}{x^p(\log x)^q}\le\dfrac{1}{x^{p-\varepsilon}}$, 从而

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\log x)^q}dx<+\infty.$$

当$p<1$时, 可取$\varepsilon>0$, 使得$p<p+\varepsilon<1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p(\log x)^q}\Big/\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\varepsilon}}{(\log x)^q}=+\infty,$$

故当$x\in[2,+\infty)$充分大时成立$\dfrac{1}{x^p(\log x)^q}\ge\dfrac{1}{x^{p+\varepsilon}}$, 从而

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\log x)^q}dx=+\infty.$$

当$p=1$时, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^q}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\log x)^q}d(\log x)=\int_{\log 2}^{+\infty}\frac{1}{y^q}dy\begin{cases}<+\infty,q>1;\\=+\infty,q\le 1.\end{cases}$ □

例 2 （1）$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx\begin{cases}<+\infty,\ p<1;\\=+\infty,\ p\ge 1.\end{cases}$

（2）$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx\begin{cases}<+\infty,\ p<1;\\=+\infty,\ p\ge 1.\end{cases}$

证：（1）$\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b\frac{1}{(x-a)^p}dx=\tfrac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^b$

$$=\tfrac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}]\to\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p},\ p<1\\+\infty,\ p>1\end{cases}(\varepsilon\to0+).$$

$$\int_{a+\varepsilon}^b\frac{1}{x-a}dx=\log(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b=\log(b-a)-\log\varepsilon\ \to+\infty\ (\varepsilon\to0+).$$

(2)类似于(1). □

例 3（一个错误的计算） 研究瑕积分$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$的敛散性.

解：（1）（错误的）$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx=\log|x|\,\Big|_{-1}^1=0$.

（2）（正确的）$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}dx$和$\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1}{x}dx$都发散, 故$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$发散. □

练习题 7.7（P_{298}） 1(11, 12), 2, 6.

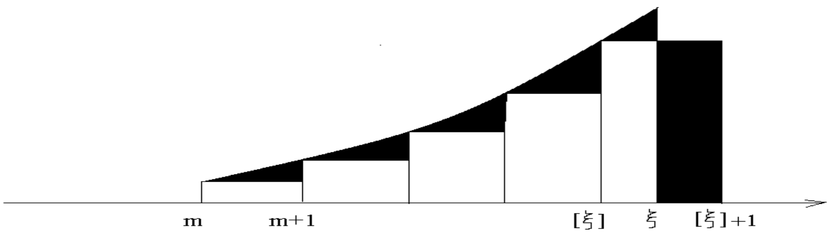
§7.8 面积原理

利用定积分是“曲边梯形”的面积这一几何直观来分析、研究、解决问题的方法，通常称为面积原理.

定理7.19 设$m\in\mathbb{Z}$，f是$[m,+\infty)$上的非负递增函数，则$\forall\xi\in[m,+\infty)$，有

$$\left|\sum_{n=m}^{[\xi]} f(n)-\int_m^{\xi} f(x)dx\right| \le f(\xi).$$

证:



如图所示，用α_ξ表示全部曲边三角形面积之和，则

$$-f(\xi)\le \sum_{n=m}^{[\xi]} f(n)-\int_m^{\xi} f(x)dx = f([\xi])(1-\{\xi\})-\alpha_\xi \le f(\xi).\ \Box$$

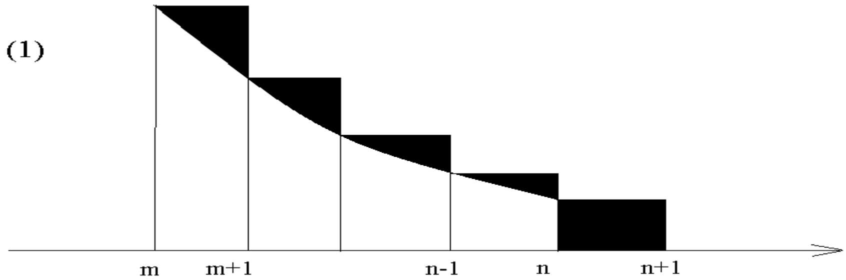
定理7.20 设$m\in\mathbb{Z}$，f是$[m,+\infty)$上的非负递减函数，则存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k)-\int_m^{n} f(x)dx\right)=\alpha\in[0,f(m)].$$

更进一步，若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则$\forall\xi\in[m,+\infty)$，有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k)-\int_m^{\xi} f(x)dx-\alpha\right| \le f(\xi).$$

证:



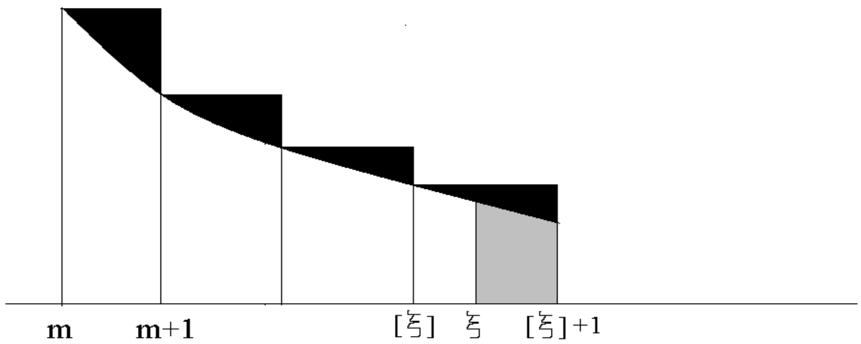
如图所示，用α_n表示全部曲边三角形面积之和，则

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)-\int_m^{n} f(x)dx = \alpha_n + f(n).$$

数列$\{\alpha_n\}$递增且$0\le\alpha_n\le f(m)-f(n)$，数列$\{f(n)\}$递减且$f(n)\ge 0$，故存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}[\alpha_n+f(n)]=\alpha\in[0,f(m)].$$

(2)



如图所示，用β_ξ表示“曲边梯形”的面积，则

$$\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^\xi f(x)dx-\alpha=\alpha_{[\xi]+1}+\beta_\xi-\alpha.$$

注意到$\{\alpha_n\}$递增收敛于α，便知$0\le\alpha-\alpha_{[\xi]+1}\le f([\xi]+1)$，从而就有$-f(\xi)\le\beta_\xi-(\alpha-\alpha_{[\xi]+1})\le f(\xi)$. □

例 1　若$\lambda>0, n\in\mathbb{N}^*$，则　$\left|\sum_{k=1}^{n}k^\lambda-\dfrac{n^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|\le n^\lambda$.

证：在定理 7.19 中取$f(x)=x^\lambda, m=0, \xi=n$，便得到

$$\left|\sum_{k=0}^{n}k^\lambda-\int_0^n x^\lambda dx\right|\le n^\lambda,\quad\text{即}\quad\left|\sum_{k=1}^{n}k^\lambda-\frac{n^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|\le n^\lambda. \ \square$$

例 2　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\log n)=\gamma$（Euler 常数）.

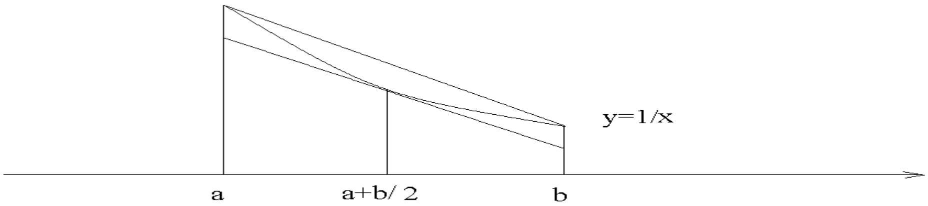
证：在定理 7.20 中取$f(x)=\dfrac{1}{x}, m=1, \xi=n$，便知存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{1}{x}dx)=\gamma\in[0,1],\quad\text{即}\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n)=\gamma.$$

此外，还能得到误差估计　$\left|\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\log n-\gamma\right|\le\dfrac{1}{n}$. □

例 3　若$0<a<b$，则$\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$.

证：如下图所示，因为$y=\dfrac{1}{x}$是$[a,b]$上的严格凸函数，故



$$\log b-\log a=\int_a^b \frac{1}{x}dx<\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(b-a).$$

曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(\frac{a+b}{2},\frac{2}{a+b})$ 处的切线方程为

$$Y-\frac{2}{a+b}=-\frac{4}{(a+b)^2}(X-\frac{a+b}{2}),$$

切线下面梯形的两底的长度分别为 $\frac{4a}{(a+b)^2}$ 和 $\frac{4b}{(a+b)^2}$. 于是,

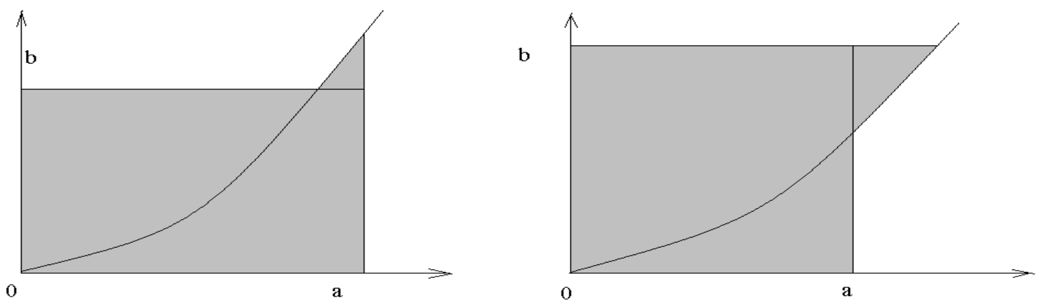
$$\log b-\log a=\int_a^b \frac{1}{x}dx>\frac{1}{2}(\frac{4a}{(a+b)^2}+\frac{4b}{(a+b)^2})(b-a)=\frac{2}{a+b}(b-a).\ \square$$

命题 1(Young 不等式) 设 φ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格递增连续函数, $\varphi(0)=0$, 从而 φ^{-1} 是 $[0,\varphi(+\infty))$ 上的严格递增连续函数, 并且 $\varphi^{-1}(0)=0$. 此时, $\forall a\in[0,+\infty)$, $b\in[0,\varphi(+\infty))$ 成立不等式

$$ab\le\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\varphi^{-1}(y)dy.$$

等号成立当且仅当 $b=\varphi(a)$.

证: 由下图即知结论成立. □



命题 2(Hölder 不等式) 设 p,q 是共轭指数, 即 $p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若函数 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\int_a^b|f||g|\le\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

作为推论,还有不等式 $\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

证: 不妨设 $\int_a^b|f|^p > 0, \int_a^b|g|^p > 0$,否则结论显然成立.在 Young 不等式中取 $\varphi(x) = x^{p-1}$,则 $\varphi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$.于是 $\forall \alpha,\beta \ge 0$,有

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha x^{p-1}dx + \int_0^\beta y^{q-1}dy = \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q.$$

令 $\alpha = |f(x)|/\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \beta = |g(x)|/\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 代入上式,就有

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b|f|^p} + \frac{1}{q}\frac{|f(x)|^q}{\int_a^b|f|^q},$$

$$\frac{\int_a^b|f||g|}{\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \ \square$$

命题 3(Minkowski 三角不等式) 设 $p \ge 1$,函数 f,g 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

作为推论,还有不等式 $\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

证: 不妨设 $p > 1$,并令 q 是 p 的共轭指数.利用 Hölder 不等式,便有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b|f+g|^p \le \int_a^b|f||f+g|^{p-1} + \int_a^b|g||f+g|^{p-1} \\
&\le \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

故 $$\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \ \square$$

练习题 7.8(P_{306}) 1,5.

问题 7.8(P_{307}) 1,3.

§7.9 Wallis 公式和 Stirling 公式

命题(Wallis 公式) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$.

证: $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}), n\in\mathbb{N}^*$, 成立不等式 $\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$. 故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}xdx,$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$ （§7.4 例 1）

$$\frac{2n}{(2n+1)}\frac{\pi}{2}<\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2<\frac{\pi}{2}.$$

由比较原理得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.\ \square$$

一个预备不等式 $\forall x>0$, 成立不等式

$$0<(x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})-1<\frac{1}{12}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}).$$

证:
$$0<\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t-t^2}{(t+x)^2}dt=-\frac{1}{2}\int_0^1(t-t^2)d(\frac{1}{t+x})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-2t}{t+x}dt=\int_0^1\frac{(x+\frac{1}{2})-(t+x)}{t+x}dt$$

$$=(x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})-1.$$

另外,
$$(x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})-1-\frac{1}{12}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t-t^2}{(t+x)^2}dt-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{(t+x)^2}dt$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{d(3t^2-2t^3-t)}{(t+x)^2} = \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{6t^2-4t^3-2t}{(t+x)^3}dt$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{d(2t^3-t^4-t^2)}{(t+x)^3} = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^2(1-t)^2}{(t+x)^4}dt < 0 . \square$$

定理 7.21(Stirling 公式) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \theta_n \in (0,1)$, 使得

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} .$$

证: 令 $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, 从而

$$\log a_n - \log a_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 .$$

在预备不等式中取 $x = n$, 就有

$$0 < \log a_n - \log a_{n+1} < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$0 < \sum_{k=1}^{n-1}(\log a_k - \log a_{k+1}) < \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

$$0 < \log a_1 - \log a_n < \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

故正数列$\{a_n\}$递减, 且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$(由上面的不等式).

由于 $\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2 e^{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}(2n)!e^{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\sqrt{n}} \to \sqrt{2\pi}\ (n\to\infty)$, 故 $A = \sqrt{2\pi}$.

$$0 < \sum_{k=n}^{\infty}(\log a_k - \log a_{k+1}) < \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

$$0 < \log a_n - \log\sqrt{2\pi} < \frac{1}{12n}.$$

令 $\theta_n = 12n\left(\log a_n - \log\sqrt{2\pi}\right) \in (0,1)$, 则 $a_n = \sqrt{2\pi}e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 即

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} . \square$$

练习题 7.9(P_{310}) 2, 3, 4.