第 7 章　函数的积分

§7.1　积分的概念

几何背景　设 $f>0$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 由 $x=a, x=b, y=0$ 和 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积 S 存在, 如何计算 S？

解:（1）将 $[a,b]$ 分割成 n 个小闭区间 $\pi=\{I_k=[x_{k-1},x_k]: k=1,2,\cdots,n\}$, 其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记 $\|\pi\|=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$；

（2）对每个小闭区间 $[x_{k-1},x_k]$, 任取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 建立和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\min f(I_k)(x_k-x_{k-1})\le S, \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\le\sum\limits_{k=1}^{n}\max f(I_k)(x_k-x_{k-1})$；

（3）$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, $\forall\|\pi\|<\delta$, 成立 $\max f(I_k)-\min f(I_k)<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall k=1,2,\cdots,n$. 于是,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-S\right|\le\sum_{k=1}^{n}[\max f(I_k)-\min f(I_k)](x_k-x_{k-1})<\varepsilon.$$

这说明, $\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=S$. □

物理背景 1　设质点在直线上以速度 $v(t)$ 运动, 如何计算在时刻 a 到时刻 b 这段时间内该质点的位移 L？

解:（1）将时间段 $[a,b]$ 分割成 n 个小时间段 $\pi=\{I_k=[t_{k-1},t_k]: k=1,2,\cdots,n\}$, 其中 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$, 记 $\|\pi\|=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$；

（2）对每个小时间段 $[t_{k-1},t_k]$, 任取 $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, 建立和式

$$\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k-t_{k-1}),$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\min v(I_k)(t_k-t_{k-1})\le L, \sum\limits_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k-t_{k-1})\le\sum\limits_{k=1}^{n}\max v(I_k)(t_k-t_{k-1})$；

(3) 因为 $v(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall\|\pi\|<\delta$，成立

$\max v(I_k)-\min v(I_k)<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$，$\forall k=1,2,\cdots,n$. 于是，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)(t_k-t_{k-1})-L\right|\le\sum_{k=1}^{n}[\max v(I_k)-\min v(I_k)](t_k-t_{k-1})<\varepsilon.$$

这说明，$\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}v(\xi_k)(t_k-t_{k-1})=L$. □

物理背景 2 设质点在力 $F(x)$ 的作用下从直线上的 a 处移动到 b 处，则也可用类似的方法计算力 $F(x)$ 对该质点所做的功.

物理背景 3 对于一根以 $\rho(x)$ 为电荷密度的细直棒，也可用类似的方法计算该细直棒所带的总电量.

定义 7.1 设 f 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数.

(1) 将 $[a,b]$ 分割成 n 个小闭区间 $\pi=\{[x_{k-1},x_k]:\ k=1,2,\cdots,n\}$，其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，称 $\|\pi\|=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ 为 $[a,b]$ 的分割 π 的模；

(2) 对每个小闭区间 $[x_{k-1},x_k]$，任取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，建立和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$；

(3) 如果不论 π 如何分法，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 如何取法，总存在有限极限

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=I,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上(Riemann)可积，并称有限极限 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的(定)积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.（称 a 为积分下限，b 为积分上限，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式）

命题（定积分的基本性质） 若函数 f,g 在有限闭区间 $[a,b]$ 上可积，$c,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 是常数，则

（1） $\int_a^b c dx = c(b-a)$；

（2） $f \geq g$ 在$[a,b]$上成立$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$；

（3） $\alpha f + \beta g$ 也在$[a,b]$上可积, 并且

$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$；（线性性质）

（4） $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.（定积分与积分变量无关）

定理 7.1（Newton-Leibniz 公式） 若$[a,b]$上的连续函数 f 有原函数F，则 f 在$[a,b]$上可积, 并且

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$$

直观证明：如图所示, 以$G(x)$表示阴影部分的面积, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$

这说明G是 f 在$[a,b]$上的一个原函数, 故$F(x)=G(x)+c, \forall x\in[a,b]$.

于是， $$\int_a^b f(x)dx = G(b) = G(b)-G(a) = F(b)-F(a).$$

严格证明：设$\pi=\{\,[x_{k-1}, x_k]:\ k=1,2,\cdots,n\}$是$[a,b]$的分割, 其中$a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 由 Lagrange 中值定理, 可取$t_k\in(x_{k-1},x_k)$使得

$$F(x_k)-F(x_{k-1}) = f(t_k)(x_k-x_{k-1}),\ k=1,2,\cdots,n.$$

故 $$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})] = F(b)-F(a).$$

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，$\forall\|\pi\|<\delta$，$\forall\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$都成立

$$|f(\xi_k)-f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall k=1,2,\cdots,n.$$

于是，
$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) - [F(b)-F(a)]\right|\\ &=\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1})\right|\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)-f(t_k)|(x_k-x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1}) = \varepsilon.\end{aligned}$$

即 $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=F(b)-F(a).\ \square$$

注记 7.1′ 以后会看到, $[a,b]$上的连续函数一定是可积函数; 任意区间上的连续函数一定有原函数.

定理 7.1 的推广(Newton-Leibniz 公式) 若$[a,b]$上的可积函数 f 有原函数F,则 $$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a).$$

证: 设$\pi=\{[x_{k-1},x_k]:\ k=1,2,\cdots,n\}$是$[a,b]$的分割, 其中$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 由 Lagrange 中值定理, 可取$t_k\in(x_{k-1},x_k)$使得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=f(t_k)(x_k-x_{k-1}),\ \forall k=1,2,\cdots,n.$$

故 $$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]=F(b)-F(a).$$

于是, $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1})=F(b)-F(a).\ \square$$

练习题 7.1(P_{258}) 1(1), 3, 4(2), 5, 6(1, 2), 7(2, 5), 8.

问题 7.1(P_{260}) 1.

§7.2 可积函数的性质

定理 7.2(可积的必要条件) 若函数 f 在有限闭区间$[a,b]$上可积, 则它必在$[a,b]$上有界.

证: （反证法）假定 f 在$[a,b]$上可积, 但 f 在$[a,b]$上无界, 不妨设 f 在$[a,b]$上无上界. 对于$[a,b]$的任意分割$\pi=\{[x_{k-1},x_k]: k=1,2,\cdots,n\}$, f 必在某个小闭区间$[x_{k_0-1},x_{k_0}]$上无上界, 故只要让$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\,(k\neq k_0)$固定, 让$\xi_{k_0}\in[x_{k_0-1},x_{k_0}]$变化使得$f(\xi_{k_0})$足够大, 便能得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})>\frac{1}{\|\pi\|}.$$

这说明不可能存在有限极限$\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$, 从而与 f 在$[a,b]$上可积相矛盾. □

定理 7.3(积分区间的可加性) 设 f 是有限闭区间$[a,b]$上的函数, $c\in(a,b)$. 若 f 分别在$[a,c]$和$[c,b]$上可积, 则 f 必在$[a,b]$上可积; 反之, 若 f 在$[a,b]$上可积, 则 f 必在$[a,c]$和$[c,b]$上可积, 此时有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

证: 有关可积性的结论易由§7.6的Lebesgue定理得到. 对于$[a,b]$的分割π, 其分点为$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c=y_0<y_1<\cdots<y_n=b$, 任取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,m)$, $\eta_k\in[y_{k-1},y_k]\,(k=1,2,\cdots,n)$, 相应于分割$\pi$的和式便为

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(y_k-y_{k-1}),$$

故
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\pi\|\to 0}\left[\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(y_k-y_{k-1})\right]$$
$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \ \square$$

约定 对于$[a,b]$上的可积函数f，约定

(1) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$；(2) $\int_a^a f(x)dx=0$.

于是，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$，总成立$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$.

定理 7.4 设f是有限闭区间$[a,b]$上的非负连续函数，那么

(1) $f\neq 0\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx>0$； (2) $f=0\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=0$.

证：因为(1)和(2)是同一个结论，故只需证(1).

"$\Rightarrow$". 假定$\exists x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)>0$，则存在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$x_0\in[\alpha,\beta]$，

使得$\forall x\in[\alpha,\beta]$成立$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{1}{2}f(x_0)$，$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$，故

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^b f(x)dx$$

$$\geq 0+\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}f(x_0)dx+0=\frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha)>0.$$

"$\Leftarrow$". 显然. □

定理 7.5（第一积分中值定理） 设函数f,g在有限闭区间$[a,b]$上连续.

若g在$[a,b]$上不改变符号，则必存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

作为推论，必存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

证：不妨设$g\geq 0,g\neq 0$，故$\int_a^b g(x)dx>0$. 记$m=\min f([a,b])$，$M=\max f([a,b])$，

则当$x\in[a,b]$时有

$$m\leq f(x)\leq M,$$

$$\frac{m}{\int_a^b g(x)dx}g(x)\leq\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}f(x)g(x)\leq\frac{M}{\int_a^b g(x)dx}g(x),$$

$$m \le \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \le M \text{ .}$$

当 $m < \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx < M$ 时, 由连续函数的介值定理知, $\exists \xi \in$

(a,b) 使得 $f(\xi) = \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

当 $\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx = m$（或 M）时, $\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b [f(x)-m]g(x)dx = 0$, 故 $fg = mg$（或 $fg = Mg$）（定理 7.4）. 取 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $g(\xi) > 0$, 故 $f(\xi) = m$（或 $f(\xi) = M$）. □

注记 7.5′ 当 g 在 (a,b) 上不取零值时, 第一积分中值定理可看作是 Cauchy 中值定理；其推论可看作是 Lagrange 中值定理.

证: 令 H 是 fg 在 $[a,b]$ 上的原函数, G 是 g 在 $[a,b]$ 上的原函数. 由 Cauchy 中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{H(b)-H(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{H'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi)$,

即 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

令 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) = f(\xi)$, 即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

第一积分中值定理推论的几何解释 见图示.

练习题 7.2（P_{263}） 1, 2, 4(2), 5, 6, 7, 8, 10.