§6.3 有理函数的原函数

有理函数 若P,Q都是实系数多项式函数,则称$R=\dfrac{P}{Q}$为实有理函数;当P的次数严格小于Q的次数时,称有理函数$R=\dfrac{P}{Q}$为真分式.

引理 首系数为1的实系数多项式Q在实数范围内有唯一的因式分解

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\cdots(x^2+rx+s)^{\nu},$$

其中$a,\cdots,b$是互不相同的实数;$(p,q),\cdots(r,s)$是互不相同的实数偶,满足$p^2<4q,\cdots,r^2<4s$;$\alpha,\cdots,\beta,\mu,\cdots,\nu\in\mathbb{N}^*$,$\alpha+\cdots+\beta+2(\mu+\cdots+\nu)$恰为多项式$Q$的次数.

证: 由代数学的基本定理(任何《复变函数》教材中都会证明)容易得到这里的结论. 只要注意到,当复数$A+iB(B\neq 0)$是Q的k重根时,$A-iB$也是Q的k重根. 故Q含有因式

$$[x-(A+iB)]^k[x-(A-iB)]^k=[(x-A)^2+B^2]^k$$
$$=(x^2-2Ax+A^2+B^2)^k,\ (2A)^2<4(A^2+B^2).\ \square$$

例 1 将x^4+1在实数范围内因式分解.

解: x^4+1有4个复根$\dfrac{\sqrt2}{2}\pm i\dfrac{\sqrt2}{2}$, $-\dfrac{\sqrt2}{2}\pm i\dfrac{\sqrt2}{2}$,故

$$x^4+1=(x-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})(x-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})(x+\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})(x+\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})$$
$$=\left[(x-\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12\right]\left[(x+\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12\right]=(x^2-\sqrt2x+1)(x^2+\sqrt2x+1).\ \square$$

例 2 将x^3+5x^2+8x+4在实数范围内因式分解.

解: x^3+5x^2+8x+4有实根-1,故

$$x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x^2+4x+4)=(x+1)(x+2)^2.\ \square$$

定理 6.1(部分分式分解) 若$R=\dfrac{P}{Q}$是真分式,其分母Q有形如引理所述的因式分解,则$R=\dfrac{P}{Q}$在实数范围内有唯一的部分分式分解

$$R(x)=\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{A_j}{(x-a)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\beta}\frac{B_j}{(x-b)^j}+\sum_{j=1}^{\mu}\frac{2K_jx+L_j}{(x^2+px+q)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{2M_jx+N_j}{(x^2+rx+s)^j},$$

其中$A_j,\cdots,B_j,K_j,L_j,\cdots,M_j,N_j$都是实常数.

证: 任何数学系《复变函数》教材中都会证明. □

例 3 将$\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在实数范围内分解成部分分式.

解: 设 $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}=\dfrac{2Kx+L}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{2Mx+N}{x^2+\sqrt{2}x+1}$, 比较系数后便知$K=M=0$, $L=N=\dfrac{1}{2}$. □

例 4 将$\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$在实数范围内分解成部分分式.

解:设 $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$, 比较系数后便知 $A=1$, $B=0, C=-4$. □

有理函数的原函数 为了求出有理函数的原函数, 只要能求出

$$\int\frac{2Kx+L}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Kd(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+\int\frac{L-Kp}{(x^2+px+q)^n}dx,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

令$a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}>0$, 则只要能求出$\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+a^2\right]^n}$.

记$I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 能得到递推关系$I_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\left[\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right]+C$.

证:

$$\begin{aligned}I_n&=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}+C,\end{aligned}$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right]+C.\ \square$$

练习题 6.3（P_{246}） 4, 9, 13.

§6.4　可有理化函数的原函数

2 元多项式　称形如$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}x^jy^k$的 2 元函数为 2 元多项式函数, 其中$a_{jk}(j=0,1,\cdots,m;\ k=0,1,\cdots,n)$是实常数.

2 元有理函数　若$P(x,y),Q(x,y)$都是实系数 2 元多项式函数, 则称$R(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$为 2 元实有理函数.

$R(\cos x,\sin x)$**的原函数(万能换元法)**　对于 2 元实有理函数R, 如果令$t=\tan\dfrac{x}{2}$, 即$x=2\arctan t$, 则

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt.$$

证: $\cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}(1-\tan^2\dfrac{x}{2})=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\sec^2\frac{x}{2}}\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=d(2\arctan t)=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. □

$R(x,\sqrt[n]{\dfrac{Ax+B}{Cx+D}})$**的原函数**($n\in\mathbb{N}^*, AD\neq BC$)　对于 2 元实有理函数$R$, 如果令$t=\sqrt[n]{\dfrac{Ax+B}{Cx+D}}$, 即$x=\dfrac{Dt^n-B}{-Ct^n+A}$, 则

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{Ax+B}{Cx+D}})dx=n(AD-BC)\int R(\frac{Dt^n-B}{-Ct^n+A},t)\frac{t^{n-1}}{(-Ct^n+A)^2}dt.$$

证: $dx=d\left(\dfrac{Dt^n-B}{-Ct^n+A}\right)=\dfrac{Dnt^{n-1}(-Ct^n+A)+Cnt^{n-1}(Dt^n-B)}{(-Ct^n+A)^2}dt$

$=n(AD-BC)\dfrac{t^{n-1}}{(-Ct^n+A)^2}dt$. □

例 1 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}$, $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{\cos^{2n-1}x+\sin^{2n-1}x}$.

解: $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}=\int\frac{1}{\cos^{2n-2}x(1+\tan^{2n}x)}d(\tan x)$

$\displaystyle=\int\frac{(1+\tan^2x)^{n-1}}{1+\tan^{2n}x}d(\tan x)$.

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^{2n-1} x + \sin^{2n-1} x} = \int \frac{\tan x}{\cos^{2n-4} x (1+\tan^{2n-1} x)} d(\tan x)$$

$$= \int \frac{\tan x (1+\tan^2 x)^{n-2}}{1+\tan^{2n-1} x} d(\tan x). \square$$

例 2 求 $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$，$a < x < b$.

解: $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = -\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} d(b-x) = -2\int \sqrt{x-a}\, d\sqrt{b-x}$

$= -2\sqrt{x-a}\sqrt{b-x} + 2\int \sqrt{(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{x-a})^2}\, d\sqrt{x-a}$（由§6.2例10）

$$= -2\sqrt{x-a}\sqrt{b-x} + \sqrt{x-a}\sqrt{b-x} + (b-a)\int \frac{d\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)^2}}$$

$$= -\sqrt{x-a}\sqrt{b-x} + (b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C. \square$$

例 3 求 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx$.

解: $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x(2+x^2)} dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+x^2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} dx^2$.

令 $t = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$，即 $x^2 = \frac{1}{t^2-1}$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{t}{\left(2+\frac{1}{t^2-1}\right)}\left(\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right) dt = -\int \frac{t^2}{2(t^2-1)^2 + (t^2-1)} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t+1)(t-1)(t+\frac{\sqrt{2}}{2})(t-\frac{\sqrt{2}}{2})} dt. \square$$

利用积分表　将待求不定积分化成标准形状后，再查积分表。

积分仪和微分仪的原理　Leibniz 在 1684 年设计出了积分仪的雏形，两位不知名的工程师在 1878 年设计出了可供实用的积分仪，其原理也可用来设计微分仪. 积分仪的工作原理如黑板上的图示.

练习题 6.4（P_{250}） 1(8, 10), 2(11, 12).