第 4 章　　Taylor 定理

微积分这门课程主要由微分学、积分学、微分与积分的联系和级数这四个部分内容所组成，Taylor 定理是微分学中的核心定理.

§4.1　函数的微分

定义 4.1（一个极其重要的概念） 设 f 是 (a,b) 上的函数, $x_0 \in (a,b)$. 若存在常数 λ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\lambda h+o(h) \qquad (h\to 0),$$

则称 f 在 x_0 处可微分, 并称以 $\mathbb{R}$ 为定义域、以 dx 为自变量的线性函数 λdx 为 f 在 x_0 处的微分, 记作 $df(x_0)=\lambda dx$; 若 f 在 (a,b) 中的每一点处都可微分, 则称 f 是 (a,b) 上的可微函数, 此时 $df(x)=\lambda(x)dx$ 是 $(a,b)\times\mathbb{R}$ 上以 (x,dx) 为自变量的 2 元函数.

命题 1 函数 f 在 x_0 处可微当且仅当 f 在 x_0 处可导, 此时 $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

证: “仅当”. 假定 f 在 x_0 处可微分, 即存在常数 λ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\lambda h+o(h) \qquad (h\to 0).$$

这时, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\lambda+\dfrac{o(h)}{h}\right)=\lambda$, 故 $f'(x_0)=\lambda$,

$df(x_0)=\lambda dx=f'(x_0)dx$.

“当”. 假定 f 在 x_0 处可导, 即 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)=0$. 令 $\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h$, 则 $\varphi(h)=o(h) \quad (h\to 0)$. 于是

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h) \qquad (h\to 0).$$

这说明 f 在 x_0 处可微分, 并且 $df(x_0)=f'(x_0)dx$. □

微分的几何意义 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导. 记 $O'=(x_0,f(x_0))$, 将直角坐标系 Oxy 平移得到新坐标系 $O'(dx)(dy)$. 那么, 在新坐标系 $O'(dx)(dy)$ 下, "曲线 $y=f(x)$" 的图像在 O' 处的切线所确定的函数 $dy=f'(x_0)dx$ 就是 f 在 x_0 处的微分.

导数的记号 假定函数 f 在 x 处可导. 由 $df(x)=f'(x)dx$ 得到 $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$. 故通常将 $f'(x)$ 记为 $\dfrac{df(x)}{dx}$ 或 $\dfrac{df}{dx}(x)$, $f''(x)$ 记为 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ 记为 $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ 或 $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$. 注意, 当 $n\geq 2$ 时, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ 中的分子和分母都没有意义. 同理, 将 f' 记为 $\dfrac{df}{dx}$, f'' 记为 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ 记为 $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

注记 今后将看到, 只需定义函数的"1 阶"微分就够了, 2 阶或 2 阶以上的微分全部都是0.

命题 2(微分的形式不变性) 若两个可微函数 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(t)$ 能复合, 则 $df(\varphi(t))=f'(\varphi(t))d\varphi(t)$. 这说明, 不论 x 是自变量还是中间变量, 都有 $df(x)=f'(x)dx$.

微分用于近似计算 当 $|x-x_0|$ 很小时, $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

练习题 4.1(P_{192}) 2, 4(1, 3, 5), 5(2, 4).

§4.2 带 Peano 余项的 Taylor 定理

定义 4.2 设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导. 记

$$T_n(f,x_0;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

称其为 f 在 x_0 处的第 n 个 Taylor 多项式(称 $T_n(f,0;x)$ 为 f 的第 n 个 Maclaurin 多项式).

定理 4.1(可微分的推广) 若函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则存在唯一的次数不大于 n 的多项式—— f 在 x_0 处的第 n 个 Taylor 多项式 $T_n(f,x_0;x)$, 使得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0).$$

称 $R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$ 为 Peano 余项.

证: 由 L' Hospital 法则, 对 n 应用数学归纳法, 便得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=0,$$

故 $$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0).$$

若另有一个次数不大于 n 的多项式 $P_n(x)$ 也满足

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)\,(x\to x_0),$$

则 $$P_n(x)-T_n(f,x_0;x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0).$$

注意到 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (§3.3, 例 2), 便知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\frac{P_n^{(k)}(x_0)-f^{(k)}(x_0)}{k!}\right](x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=0,$$

因而 $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$, $\forall k=0,1,\cdots,n$, 即 $P_n(x)=T_n(f,x_0;x)$. □

注意 带 Peano 余项的 Taylor 定理强调的是“在点 x_0 附近，函数 $f(x)$ 被多项式 $T_n(f,x_0;x)$ 替代后所产生的近似误差”，因而能方便地用于研究函数的极值等局部性质.

推论 若函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则 $\forall k=1,\cdots,n-1$，总成立

$$f^{(k)}(x)=\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}+o((x-x_0)^{n-k})\ (x\to x_0).$$

证： $f^{(k)}$ 在 x_0 处 $n-k$ 阶可导，并且 $\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}$ 恰好是 $f^{(k)}$ 在 x_0 处的第 $n-k$ 个 Taylor 多项式 $T_{n-k}(f^{(k)},x_0;x)$，故

$$f^{(k)}(x)=\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}+o((x-x_0)^{n-k})\ (x\to x_0).\ \square$$

定理 4.2（复杂情形下极值的充分条件） 设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，$n\geq 2$，$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，那么

(1) 若 n 是偶数，并且 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的严格极大值；

(2) 若 n 是偶数，并且 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的严格极小值；

(3) 若 n 是奇数，则 $f(x_0)$ 不是 f 的极值.

证： 由于 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$，故 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 与 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 符号相同.

(1) $f(x)<f(x_0)$，$\forall 0<|x-x_0|<\delta$；

(2) $f(x)>f(x_0)$，$\forall 0<|x-x_0|<\delta$；

(3) $(f(x)-f(x_0))(f(y)-f(x_0))<0$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，$y\in(x_0,x_0+\delta)$. $\square$

Taylor 定理用于近似计算 当 $|x-x_0|$ 很小时，$f(x)\approx T_n(f,x_0;x)$.

例（必须记住）

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\ (x\to 0);$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n})\ (x\to 0);$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\ (x\to 0);$$

$$(1+x)^{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda}{k}x^k+o(x^n)\ (x\to 0),\ \lambda\in\mathbb{R};$$

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2})\ (x\to 0).$$

证：仅证$\ln(1+x)$和$\arctan x$这两种情形.

（1）设$\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k+o(x^n)\ (x\to 0)$，由定理 4.1 的推论便得到

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}+o(x^{n-1})\ (x\to 0).$$

因为$\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}=\sum\limits_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$，故$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}+o(x^{n-1})$. 比较系数后便知 $a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k},k=1,2,\cdots,n$.

（2）设$\arctan x=\sum\limits_{j=1}^{2n+2}a_jx^j+o(x^{2n+2})\ (x\to 0)$，由定理 4.1 的推论便得到

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{j=1}^{2n+2}ja_jx^{j-1}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0).$$

因为$\dfrac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-x^2)^k$，故$\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-x^2)^k+o(x^{2n+1})$. 比较系数后便知 $a_j=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}, & j=2k+1\\ 0, & j=2k+2\end{cases}$，$k=0,1,2,\cdots,n$. □

练习题 4.2（P_{201}） 2, 3.

问题 4.2（P_{201}） 1, 3.

§4.3 带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理

定理 4.3(Lagrange 中值定理的推广) 设 I 是以 a,b 为左、右端点的区间，$x_0\in I$．若 f 是 I 上的 C^n 函数，并且在 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，则 $\forall x\in I$，必 $\exists\xi$ 介于 x_0 和 x 之间，使得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

更进一步，$\forall x\in I$ 和 $\mu=1,2,\cdots,n+1$，必 $\exists\xi$ 介于 x_0 和 x 之间，使得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\mu n!}(x-\xi)^{n+1-\mu}(x-x_0)^{\mu}.$$

称 $R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项；称 $R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{\mu n!}(x-\xi)^{n+1-\mu}(x-x_0)^{\mu}$ 为 Cauchy 余项.

证：仅证 $x_0<x$ 和 Cauchy 余项的情形. $\varphi(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ 在 I 上连续，在 (a,b) 上可导，并且

$$\varphi'(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

注意到 $\psi(t)=(x-t)^{\mu}$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，ψ' 在 (x_0,x) 上不取零值，由 Cauchy 中值定理便知，$\exists\xi\in(x_0,x)$ 使得 $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\dfrac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$，即

$$\frac{f(x)-T_n(f,x_0;x)}{-(x-x_0)^{\mu}}=\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-\mu(x-\xi)^{\mu-1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{-\mu n!}(x-\xi)^{n+1-\mu},$$

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\mu n!}(x-\xi)^{n+1-\mu}(x-x_0)^{\mu}.\ \square$$

注意 带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理强调的是“在整个定义区间 I 上, 函数 $f(x)$ 被多项式 $T_n(f,x_0;x)$ 替代后所产生的精确误差”, 因而能方便地用于研究函数的单调性、凸性、函数值的计算等整体性质.

推论 设 I 是以 a,b 为左、右端点的区间, $x_0\in I$. 若 f 是 I 上的 C^n 函数, 并且在 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x\in I$ 和 $k=1,2,\cdots,n$, 必 $\exists\xi$ 介于 x_0 和 x 之间, 使得

$$f^{(k)}(x)=\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1-k)!}(x-x_0)^{n+1-k}.$$

证: $f^{(k)}$ 是 I 上的 C^{n-k} 函数, 在 (a,b) 上 $n+1-k$ 阶可导, $\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}$ 恰好是 $f^{(k)}$ 在 x_0 处的第 $n-k$ 个 Taylor 多项式 $T_{n-k}(f^{(k)},x_0;x)$, 故由带 Lagrange 余项的 Taylor 定理知, 必 $\exists\xi$ 介于 x_0 和 x 之间, 使得

$$f^{(k)}(x)=\left(T_n(f,x_0;x)\right)^{(k)}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1-k)!}(x-x_0)^{n+1-k}.\ \square$$

注记 即使 f 是 I 上的 C^∞ 函数, 通常也不成立 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(f,x_0;x)=f(x)$. 例如, $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, f 的 Maclaurin 多项式 $T_n(f,0;x)$ 恒为 0, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(f,0;x)=0\neq f(x)$.

例 1 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 定理, 容易解释函数 f 在开区间 (a,b) 上的凸性为什么能由 $f''\geq 0$ 得到.

解: $\forall x_1,x_2\in(a,b),\ x_1<x_2,\ \lambda\in(0,1)$, 记 $x_0=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$, 则有

$$f(x_1)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\quad f(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0).$$

从而 $$(1-\lambda)f(x_1)\geq(1-\lambda)f(x_0)+(1-\lambda)f'(x_0)(x_1-x_0),$$

$$\lambda f(x_2)\geq\lambda f(x_0)+\lambda f'(x_0)(x_2-x_0).$$

加起来便得到

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\ge f(x_0)+f'(x_0)[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2-x_0]=f(x_0).\ \square$$

例 2(定理 4.4) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上 2 阶可导, 则 $\forall x\in(a,b)$, 必 $\exists\xi(x)\in(a,b)$ 使得

$$\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]-f(x)=\frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(\xi(x)).$$

（也可以解释为什么 $f''\ge 0$ 能确保 f 是凸函数）

证: 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 定理, 则有

$$f(a)-f(x)=f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1(x))}{2}(a-x)^2,\ a<\xi_1(x)<x,$$

$$f(b)-f(x)=f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2(x))}{2}(b-x)^2,\ x<\xi_2(x)<b.$$

故

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]-f(x)\\
&=\frac{(f(b)-f(x))-(f(a)-f(x))}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x)\\
&=\left(\frac{b-x}{b-a}\right)(f(a)-f(x))+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(f(b)-f(x))\\
&=\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f'(x)(a-x)+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\frac{f''(\xi_1(x))}{2}(x-a)^2\\
&+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)f'(x)(b-x)+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\frac{f''(\xi_2(x))}{2}(b-x)^2\\
&=\frac{(x-a)(b-x)}{2}\left[\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_1(x))+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_2(x))\right].
\end{aligned}$$

注意到 $\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_1(x))+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_2(x))$ 介于 $f''(\xi_1(x))$ 和 $f''(\xi_2(x))$ 之间, 再由导函数的介值定理便知, $\exists\xi(x)\in[\xi_1(x),\xi_2(x)]$ 使得

$$f''(\xi(x))=\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_1(x))+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)f''(\xi_2(x)).\ \square$$

练习题 4.3(P_{210}) 3(2, 4, 6), 5, 6.

问题 4.3(P_{211}) 1, 2, 3, 4, 7.