§2.5　极限过程的其他形式

实数集的广义极限点(或广义凝聚点)　设 X 是实数集. 若 X 无上界，即 $\forall A>0, \exists x\in X$ 满足 $x>A$, 则称 $+\infty$ 是 X 的一个极限点(或凝聚点)；若 X 无下界，即 $\forall A>0, \exists x\in X$ 满足 $x<-A$, 则称 $-\infty$ 是 X 的一个极限点(或凝聚点)；若 X 无界，即 $\forall A>0, \exists x\in X$ 满足 $|x|>A$, 则称 ∞ 是 X 的一个极限点(或凝聚点).

定义 2.12 和 2.13　设 f 是 X 上的单变量函数，∞ 是 X 的极限点，$l\in\mathbb{R}$ 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0, \exists A>0$，使得当 $x\in X, |x|>A$ 时成立 $|f(x)-l|<\varepsilon$, 则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 趋向于 l；或称当 $x\to\infty$ 时 f 有极限 l；或称当 $x\to\infty$ 时 f 以 l 为极限；或称 f 在 ∞ 处有极限 l. “当 $x\to\infty$ 时 f 有极限 l” 这件事用数学符号表示成

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\ (x\to\infty) 或 f(\infty)=l.$$

类似地，能定义当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时单变量函数 f 的极限（类似于单侧极限）. 容易看出, 与单变量函数的极限有关的所有结论都能推广到在 $\infty, +\infty$ 和 $-\infty$ 处极限的情形.

例 1　可将数列 $\{a_n\}$ 视为 $\mathbb{N}^*$ 上的单变量函数 $f(x)=a_n, \forall x=n\in\mathbb{N}^*$. 于是, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.

定理 2.15 设 f 是 X 上的单变量函数, X 无界. 那么

(1) 当 X 有下界时, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$；

(2) 当 X 有上界时, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$；

(3) 当 X 既无上界又无下界时, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$.

第二个重要的函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

证：当 $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,0]$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 有意义.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=e$. 这是因为 $\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增有界之故.

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. 这是因为当 $x\in[1,+\infty)$ 时成立不等式

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

之故.

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. 记 $y=-(x+1)$, 则当 $x\in(-\infty,-1)$ 时有 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ $=\left(\frac{-x-1}{-x}\right)^{x+1-1}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}$, 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}=e$. □

练习题 2.5（P_{85}） 1(3), 2(3), 3, 5, 6(2, 5, 6, 7, 8, 9, 10), 7, 8, 9, 10.

问题 2.5（P_{86}） 3.

§2.6 无穷小与无穷大

定义 2.14 设 f 是 X 上的单变量函数, x_0 是 X 的极限点. 若 $\forall A>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in X$, $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立 $|f(x)|>A$, 则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 趋向于 ∞, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty\,(x\to x_0).$$

类似地, 能定义诸如 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 等各种形式的广义极限.

不重要的术语—无穷小(量)和无穷大(量) 若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=0$, 则称当 $x\to x_0+$ 时 $f(x)$ 是无穷小(量); 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷小(量); 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大(量); 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, 则称当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷大(量); 依此类推, 能定义各种形式的无穷小(量)和无穷大(量).

显然, 若 f 和 $\dfrac{1}{f}$ 都有定义, 则当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小(量) $\Leftrightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大(量).

定义 2.15 (不重要的术语—无穷小(量)和无穷大(量)的阶的比较) 设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小(量), 并且在 x_0 的某个去心邻域上 $g(x)\neq 0$. 那么

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小(量);

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小(量);

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 等价的无穷小(量).

类似地，能定义无穷大(量)的阶的比较；也能定义其它形式的无穷小(量)和无穷大(量)的阶的比较.

注意：任意两个无穷小(量)未必能比较阶的大小；任意两个无穷大(量)也未必能比较阶的大小.

定义 2.16（几个必须牢记的重要的数学符号） 设 g 是 X 上的单变量函数，x_0 是 X 的极限点，并且在 x_0 的某个去心邻域上 $g(x)\neq 0$. 那么

(1) $\forall$ X 上的单变量函数 f，只要满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，便记 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$；

(2) $\forall$ X 上的单变量函数 f，只要 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个去心邻域上有界，便记 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$；

(3) $\forall$ X 上的单变量函数 f，只要满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，便记 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$.

类似地，能规定 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0-)$，$f(x)=O(g(x))\ (x\to\infty)$ 和 $f(x)\sim g(x)\ \ (x\to-\infty)$ 等各种符号的意义.

注意：$o(g(x))\ (x\to x_0)$ 能记成 $O(g(x))\ (x\to x_0)$，但 $O(g(x))\ (x\to x_0)$ 不能记成 $o(g(x))\ (x\to x_0)$.

例 $x^6+\cos x=O(x^6)\ (x\to\infty)$； $x^6+\cos x\sim x^6\ (x\to\infty)$；

$x\sin\dfrac{1}{x}=O(x)\ (x\to 0)$；

$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e+o(1)(x\to 0)$；

$\dfrac{x^{9.5}+10x^4}{x^7-5\sin x}=o(x^3)\ (x\to+\infty)$； $\dfrac{x^{9.5}+10x^4}{x^7-5\sin x}\sim x^{2.5}\ (x\to+\infty)$；

$1-\cos x=O(1)\ (x\to x_0)$.

练习题 2.6（P_{91}） 2(3, 4), 3(1, 3, 5).

问题 2.6（P_{92}） 2.

§2.7 连续函数

函数在某点处的连续 设 f 是 X 上的单变量函数，$x_0\in X$．若当 $x\in X$，$|x-x_0|$很小时，$|f(x)-f(x_0)|$也很小，则称 f 在 x_0 处连续；若 f 在 X 中的每个点处都连续，则称 f 是 X 上的连续函数.

定义 2.17 设 f 是 X 上的单变量函数，$x_0\in X$．若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$\forall x\in X,|x-x_0|<\delta$成立

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处连续；若 f 在 X 中的每个点处都连续，则称 f 是 X 上的连续函数；X 上连续函数的全体通常用$C(X)$表示.

命题 1（在某点处连续的等价条件） 设 f 是 X 上的单变量函数，若 $x_0\in X$ 不是 X 的极限点（此时称为 X 的孤立点），则 f 必在 x_0 处连续；若 $x_0\in X$ 是 X 的极限点，则 f 在 x_0 处连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

证：（1） $x_0\in X$ 是 X 的孤立点.

$\exists\delta>0$，使得 $X\bigcap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$，故$\forall\varepsilon>0$，当 $x\in X,|x-x_0|<\delta$ 时有$|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$．这说明 f 在 x_0 处连续.

（2） $x_0\in X$ 是 X 的极限点.

“$\Rightarrow$”． 若 f 在 x_0 处连续，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当$x\in X,|x-x_0|<\delta$时成立$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则当 $x\in X$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时更加成立$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．这说明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

“$\Leftarrow$”． 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当$x\in X$，$0<|x-x_0|<\delta$时成立$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，显然当$x\in X,|x-x_0|<\delta$时也成立$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．这说明 f 在 x_0 处连续. □

例 1 有限实数集，$\mathbb{N}^*$，$\mathbb{Z}$ 上的函数都是连续函数.

例 2 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$f(x)=x^n$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数；$\forall c\in\mathbb{R}$，常数函数$f(x)=c$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

例 3 $\sin x$和$\cos x$都是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

证：（1）$\sin x$在每个$x_0\in\mathbb{R}$处连续.

$0\le|\sin x-\sin x_0| =2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le|x-x_0|$，故

$0\le\lim\limits_{x\to x_0}|\sin x-\sin x_0|\le\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$，即$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

（2）$\cos x$在每个$x_0\in\mathbb{R}$处连续.

$0\le|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le|x-x_0|$，故

$0\le\lim\limits_{x\to x_0}|\cos x-\cos x_0|\le\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$，即$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$. □

例 4 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

处处不连续；$xD(x)$仅在0处连续.

证：（1）$\forall$固定的$x_0\in\mathbb{R}$，存在收敛于x_0的有理数列$\{y_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$和无理数列$\{z_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}D(y_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}D(z_n)=0$，这说明$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在，故$D$在$x_0$处不连续.

（2）显然 $\lim\limits_{x\to 0}xD(x)=0$成立，故$xD(x)$在0处连续. 若$xD(x)$在$x_0\ne 0$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xD(x)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}xD(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}x}=\frac{x_0D(x_0)}{x_0}=D(x_0)$，这说明$D$在$x_0$处连续，与已知相矛盾. □

定义 2.18（仅对单变量函数有意义） 若$f(x_0+)=f(x_0)$，则称f在x_0处右连续；若$f(x_0-)=f(x_0)$，则称f在x_0处左连续.

命题 2 设 f 是 X 上的单变量函数, $x_0\in X$ 是 X 的极限点. 那么

(1) 当 x_0 不是 $X\bigcap(-\infty,x_0)$ 的极限点时, f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 处右连续;

(2) 当 x_0 不是 $X\bigcap(x_0,+\infty)$ 的极限点时, f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 处左连续;

(3) 当 x_0 既是 $X\bigcap(x_0,+\infty)$ 的极限点又是 $X\bigcap(-\infty,x_0)$ 的极限点时, f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 处左、右连续.

例 5 $a^x\ (a>0,a\neq 1)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

证: 因为 a^x 是单调函数, 并且在任何有限区间上有界, 故 $\lim\limits_{x\to 0+}a^x$ 存在. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$, 便知 $\lim\limits_{x\to 0+}a^x=1=a^0$; 另一方面, 有 $\lim\limits_{x\to 0-}a^x=\lim\limits_{y\to 0+}a^{-y}$ $=\lim\limits_{y\to 0+}\left(\dfrac{1}{a}\right)^y=1=a^0$. 这说明 a^x 在 0 处连续.

$\forall$ 固定的 $x_0\in\mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim\limits_{y\to 0}a^y=a^{x_0}$. 这说明 a^x 在 x_0 处连续. □

定理 2.17 设 f,g 是 X 上的单变量函数, $x_0\in X$. 若 f,g 都在 x_0 处连续, 则 $f\pm g$, fg 都在 x_0 处连续; 在附加上条件"g 处处不取零值"后, $\dfrac{f}{g}$ 也在 x_0 处连续.

定理 2.18 若 f 在 x_0 处连续, g 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续, 则 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.

定理 2.19 若 f 是区间 I 上的严格递增(或严格递减)的连续函数, 则 f^{-1} 也是 $f(I)$ 上的严格递增(或严格递减)的连续函数.

证: $\forall x_0\in I$, 要证 f^{-1} 在 $y_0=f(x_0)\in f(I)$ 处连续. 不妨设 f 在 I 上严格递增, x_0 是 I 的内点, 即 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)\subset I$. $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 令 $\delta_1=y_0-f(x_0-\varepsilon)>0$, $\delta_2=f(x_0+\varepsilon)-y_0>0$, $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, 则

当 $y\in f(I)$，$|y-y_0|<\delta$ 时有 $y_0-\delta_1\le y_0-\delta<y<y_0+\delta\le y_0+\delta_2$, 从而 $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$, 故 $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$, 即

$$\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|<\varepsilon. \square$$

注记 2.19′ 不能将定理 2.19 中的“区间 I ”换成“实数集 X ”, 否则结论可能不正确. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1);\\ 1, & x=2;\\ x-2, & x\in(3,+\infty)\end{cases}$$

是 $X=(0,1)\cup\{2\}\cup(3,+\infty)$ 上严格递增的连续函数, 但

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} y, & y\in(0,1);\\ 2, & y=1;\\ y+2, & y\in(1,+\infty)\end{cases}$$

不是 $f(X)=(0,+\infty)$ 上的连续函数.

例 6 $a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的反函数——对数函数 $\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}$ 是 $(0,+\infty)$ 上严格单调的连续函数； 幂函数 $x^\mu=e^{\mu\log x}$ ($\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$为常数) 是 $(0,+\infty)$ 上严格单调的连续函数；幂函数 $x^\mu=\begin{cases} e^{\mu\log x}, & x>0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ ($\mu>0$ 为常数）是 $[0,+\infty)$ 上严格递增的连续函数； $\sin x\ (-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 的反函数 $\arcsin x$ 是 $[-1,1]$ 上严格递增的连续函数； $\cos x\ (0\le x\le\pi)$ 的反函数 $\arccos x$ 是 $[-1,1]$ 上严格递减的连续函数；$\tan x\ (-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$ 的反函数 $\arctan x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增的连续函数； $\cot x\ (0<x<\pi)$ 的反函数 $\operatorname{arc}\cot x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递减的连续函数.

术语 多项式函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数经过有限次的四则运算和复合运算后所得函数称为初等函数.

定理 2.20 每个初等函数都是其定义域上的连续函数.

术语 若函数 f 在 x_0 处连续, 则称 x_0 是 f 的连续点；若函数 f 在 x_0 处不连续, 则称 x_0 是 f 的不连续点或间断点.

定义 2.20（仅对开区间上的函数定义） 设 f 是开区间 (a,b) 上的函数, x_0 是 f 的间断点. 那么

(1) 若 $f(x_0+), f(x_0-)\in\mathbb{R}$ 存在, 但 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$, 则称 x_0 是 f 的跳跃点, 并称 $|f(x_0+)-f(x_0-)|$ 是 f 在 x_0 处的跳跃；

(2) 若 $f(x_0+), f(x_0-)\in\mathbb{R}$ 存在, 并且 $f(x_0+)=f(x_0-)$, 则称 x_0 是 f 的可去间断点；

(3) 称 f 的跳跃点和可去间断点为 f 的第一类间断点; 若 f 的间断点不是第一类间断点, 则称其为 f 的第二类间断点.

定理 2.21 (a,b) 上单调函数 f 的间断点一定是 f 的跳跃点, 并且其间断点的全体至多可数.

证: 不妨设 f 是 (a,b) 上的递增函数.

(1) 对于 f 的间断点 $x_0\in(a,b)$, 由于 $f(x_0-)\le f(x_0)\le f(x_0+)$, 故必有 $f(x_0+)>f(x_0-)$. 这便证明了 f 的间断点是 f 的跳跃点.

(2) 记 E 是 f 的间断点的全体. $\forall x\in E$, 令其对应于开区间 $(f(x-), f(x+))$ 中的一个有理数 $g(x)$, 则 $g: E\to\mathbb{Q}$ 是单射. 这是因为当 $x_1, x_2\in E, x_1<x_2$ 时有 $f(x_1+)\le f(x_2-)$, 从而有 $g(x_1)<f(x_1+)$ $\le f(x_2-)<g(x_2)$ 之故. 这便证明了 E 至多可数. □

练习题 2.7（P_{98}） 1(3, 4, 5), 2(3, 4), 4(1, 2), 5, 6, 7, 10.

问题 2.7（P_{100}） 1, 3, 4, 5.

§2.8 连续函数与极限运算

注记(理解连续函数的另一观点) 设 f 是 X 上的单变量函数，$x_0 \in X$ 是 X 的极限点. 注意到 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$，便知 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. 这说明连续函数就是与极限运算可交换次序的函数.

例 1 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^y\right)=\ln e=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\overset{t=a^x-1}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\ln a}{\ln(1+t)}=\ln a$.

(3) 只需考虑 $a\neq 0$ 的情形.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\right)\left(\frac{a\ln(1+x)}{x}\right)$$

$$\overset{y=a\ln(1+x)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}=a. \square$$

例 2 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^m-x_0^m}{x-x_0}=m x_0^{m-1}\ (m\in\mathbb{N}^*)$.

解：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^m-x_0^m}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{m-1}+x^{m-2}x_0+\cdots+xx_0^{m-2}+x_0^{m-1})=m x_0^{m-1}$. $\square$

求 1^∞ 型极限的方法 设 u,v 是 X 上的单变量函数，x_0 是 X 的极限点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)(u(x)-1)=\lambda\in\mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lambda}$. 将“$x\to x_0$”换成“$x\to x_0+$，$x\to\infty$”等其它形式的极限时，结论仍然成立.

证：记 $E=\{x\in X : u(x)=1\}$.

(1) x_0 不是 E 的极限点. 这时有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in(X\setminus E)\setminus\{x_0\}}} \left([1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{v(x)(u(x)-1)} = e^{\lambda}.$$

(2) x_0 不是 $X\setminus E$ 的极限点. 这时有 $\lambda = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} v(x)(u(x)-1) = 0$, 于是

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} u(x)^{v(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} 1^{v(x)} = 1 = e^{\lambda}.$$

(3) x_0 既是 E 的极限点, 又是 $X\setminus E$ 的极限点. 这时同样有 $\lambda =$ $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} v(x)(u(x)-1) = 0$. 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in(X\setminus E)\setminus\{x_0\}}} u(x)^{v(x)} =$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in(X\setminus E)\setminus\{x_0\}}} \left([1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{v(x)(u(x)-1)} = e^{\lambda} = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} u(x)^{v(x)} =$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} 1^{v(x)} = 1$, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = 1 = e^{\lambda}$. □

例 3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a_1\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$, $a_1,\cdots,a_n>0$.

解: 令 $u(x)=\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}$, $v(x)=\dfrac{1}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to 0} v(x)(u(x)-1) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\left(a_1^x-1\right)+\cdots+\left(a_n^x-1\right)}{n} = \ln\left(a_1\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$ □

练习题 2.8（P_{104}） 1(4, 5), 2(3, 4), 3(3, 7, 9, 10), 4.