§1.8 基本数列和收敛原理

定义 1.9 设$\{a_n\}$是一个数列. 若$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当$n > N$时, $\forall p \in \mathbb{N}^*$都成立

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| < \varepsilon,$$

则称$\{a_n\}$是 Cauchy 数列或基本数列. 显然, 收敛数列是基本数列.

引理 1.1 任意数列必有一个单调子列.

证: 若a_k严格大于$\{a_n\}(n \ge k+1)$中的每一项, 则称a_k是数列$\{a_n\}$的一个“龙头”.

(1) 假定$\{a_n\}$有无穷多个“龙头”a_{k_1}, a_{k_2}, $a_{k_3}, \cdots$, 则子列$\{a_{k_n}\}$严格递减.

(2) 假定$\{a_n\}$只有有限个“龙头”, 则$\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当$n \ge N$时, 每个$a_n$都不是“龙头”. 令$a_{k_1} = a_N$; 因为$a_{k_1}$不是“龙头”, 故存在正整数$k_2 > k_1$使得$a_{k_2} \ge a_{k_1}$; 又因为$a_{k_2}$不是“龙头”, 故存在正整数$k_3 > k_2$使得$a_{k_3} \ge a_{k_2}$; …. 于是, 子列$\{a_{k_n}\}$递增. □

定理 1.11 (Bolzano-Weierstrass 列紧性定理)任意有界数列必有一个收敛子列.

注记 1.10′ 定理 1.10 是实数完备性或连续性的一种表现形式.

定理 1.12 (Cauchy 收敛原理)数列收敛的充要条件是它为基本数列.

证: 只需证充分性. 设$\{a_n\}$是基本数列, 故$\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得$\forall p \in \mathbb{N}^*$都成立$\left| a_{N_1+1+p} - a_{N_1+1} \right| < 1$, 这说明$\{a_n\}$是有界数列. 由列紧性定理, $\{a_n\}$有一个子列$\{a_{k_n}\}$收敛于a.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当$n > N$时, $\forall p \in \mathbb{N}^*$都成立$\left| a_{n+p} - a_n \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

于是当 $m>n$ 时成立 $\left|a_{k_m}-a_n\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而 $\left|a_n-a\right|\le\left|a_{k_m}-a\right|+\left|a_{k_m}-a_n\right|$

$<\left|a_{k_m}-a\right|+\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令 $m\to\infty$ 便得到 $\left|a_n-a\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, 这说明 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

□

数域的完备性或连续性　称满足 Cauchy 收敛原理的数域是完备的(或连续的). 于是,实数域是完备的,而有理数域是不完备的.

例　设 $\{a_n\}$ 是数列. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$ 和 A, 使得当 $n>N$ 时成立 $|a_n-A|<\varepsilon$, 问 $\{a_n\}$ 是否收敛？说明理由.

解： $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$ 和 A, 使得当 $n>N$ 时成立 $|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N}^*$ 都成立 $|a_{n+p}-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是, 当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N}^*$ 都成立 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 由 Cauchy 收敛原理便知 $\{a_n\}$ 收敛. 但要注意, $\{a_n\}$ 未必以 A 为极限.

练习题 1.8（P_{38}）　1, 2(1, 2), 3(2, 4), 5, 6.

§1.9　上确界和下确界

实数集的上、下界　设$E\subset\mathbb{R}$. 若$\exists A\in\mathbb{R}$, 使得$\forall x\in E$都成立$x\le A$, 则称E有上界, 并A是E的一个上界; 若存在$B\in\mathbb{R}$使得$\forall x\in E$都成立$x\ge B$, 则称E有下界, 并称B是E的一个下界；称既有上界又有下界的数集为有界集. 显然, 数集E有界$\Leftrightarrow\exists M>0$, 使得$\forall x\in E$都成立$|x|\le M$. 注意，空集也被认为是有界集.

定义 1.10(最大数的推广)　设$E\subset\mathbb{R}$非空. 当E有上界时, 称E的最小上界β是E的上确界, 记为$\sup E=\beta$. β是E的最小上界，意思是(1) β是E的上界；(2) $\forall\varepsilon>0,\exists x\in E$使得$x>\beta-\varepsilon$. 当$E$无上界时, 称$+\infty$是$E$的上确界, 记为$\sup E=+\infty$.

定义 1.11(最小数的推广)　设$E\subset\mathbb{R}$非空. 当E有下界时, 称E的最大下界α是E的下确界, 记为$\inf E=\alpha$. α是E的最大下界，意思是(1) α是E的下界；(2) $\forall\varepsilon>0,\exists x\in E$使得$x<\alpha+\varepsilon$. 当$E$无下界时, 称$-\infty$是$E$的下确界, 记为$\inf E=-\infty$.

命题 1　若非空实数集$E\subset\mathbb{R}$中有最大数$\max E$（或最小数$\min E$）, 则$\sup E=\max E$（或$\inf E=\min E$）；若$\varnothing\ne E_1\subset E_2\subset\mathbb{R}$，则$\sup E_1\le\sup E_2$，$\inf E_1\ge\inf E_2$.

例 1　求下列数集的上、下确界

(1)　$\sup(a,b]=b=\max(a,b],\inf(a,b]=a$不是$(a,b]$的最小数；

(2)　$\sup\mathbb{Z}=+\infty$不是$\mathbb{Z}$的最大数，$\inf\mathbb{Z}=-\infty$不是$\mathbb{Z}$的最小数；

(3)　$\sup[(0,1)\cap\mathbb{Q}]=1$不是$(0,1)\cap\mathbb{Q}$的最大数，$\inf[(0,1)\cap\mathbb{Q}]=0$不是$(0,1)\cap\mathbb{Q}$的最小数.

定理 1.13(确界原理)　非空实数集必有上确界和下确界.

证:(用闭区间套定理证)只需证有上界的非空实数集$E\subset\mathbb{R}$存在上确界即可. 任取 E 的一个上界 b_1, 故 $\exists a_1\in E$ 满足$[a_1,b_1]\bigcap E\neq\varnothing$；当$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]\bigcap E\neq\varnothing$ 时，令 $[a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，否则令$[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$，故 $[a_2,b_2]\bigcap E\neq\varnothing$， b_2 是 E 的上界；当$[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]\bigcap E\neq\varnothing$ 时，令 $[a_3,b_3]=[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]$，否则令$[a_3,b_3]=[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]$, 故$[a_3,b_3]\bigcap E\neq\varnothing$, b_3是E的上界；$\cdots$. 闭区间$I_n=[a_n,b_n](n\in\mathbb{N}^*)$ 满足 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$ 和$\left|I_n\right|=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0\,(n\to\infty)$.

由闭区间套定理, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 是独点集$\{\beta\}$. 下面证β就是E的上确界.

(1)　$\forall x\in E$, 总成立$x\leq b_n$, 故$x\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$, 这说明$\beta$是$E$的上界.

(2)　$\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}^*$ 使得$a_n>\beta-\varepsilon$. 由于$[a_n,b_n]\bigcap E\neq\varnothing$, 故$\exists x\in E$ 使得$x>\beta-\varepsilon$. 这说明β就是E的上确界. □

注记 1. 13′　定理 1. 13 是实数完备性或连续性的一种表现形式.

命题 2　设$E\subset\mathbb{R}$非空. 若E没有最大数(或最小数), 则必存在严格递增(或递减)的数列$\{x_n\}\subset E$趋向于$\sup E$ (或$\inf E$).

证: 设E无上界. $\exists x_1\in E$ 使得 $x_1>1$； $\exists x_2\in E$ 使得 $x_2>\max(x_1,2)$；$\exists x_3\in E$ 使得$x_3>\max(x_2,3)$；$\cdots$. 于是, 数列$\{x_n\}\subset E$ 严格递增趋向于$+\infty=\sup E$.

设E有上界, 记$\beta=\sup E$. $\exists x_1\in E$ 使得$\beta>x_1>\beta-1$；$\exists x_2\in E$ 使得

$\beta > x_2 > \max(x_1, \beta - \frac{1}{2}) \ge \beta - \frac{1}{2}$； $\exists x_3 \in E$ 使得 $\beta > x_3 > \max(x_2, \beta - \frac{1}{3}) \ge \beta - \frac{1}{3}$； $\cdots$, $\exists x_n \in E$ 使得 $\beta > x_n > \max(x_{n-1}, \beta - \frac{1}{n}) \ge \beta - \frac{1}{n}$. 于是, 数列 $\{x_n\} \subset E$ 严格递增收敛于 $\beta = \sup E$. □

例 2（$\mathbb{R}$ 的连通性） 若 $A, B \subset \mathbb{R}$ 满足 $A \ne \varnothing, B \ne \varnothing, A \bigcap B = \varnothing$，$A \bigcup B = \mathbb{R}$，则或者有 A 中的数列收敛于 B 中的点, 或者有 B 中的数列收敛于 A 中的点(这也是实数完备性或连续性的一种表现形式).

证：（用确界原理证）取 $a \in A, b \in B$，不妨设 $a < b$，并记 $\beta = \sup(A \bigcap [a, b])$, 显然 $a \le \beta \le b$.

(1) $\beta \in B$. 因为 β 不是 $A \bigcap [a, b]$ 的最大值, 故存在严格递增的数列 $\{x_n\} \subset A \bigcap [a, b] \subset A$ 收敛于 $\beta \in B$（命题 2), 定理得证;

(2) $\beta \in A$. 这时, $\beta < b$，$A \bigcap (\beta, b] = \varnothing$, 从而 $(\beta, b] \subset B$, 故存在严格递减的数列 $\{x_n\} \subset (\beta, b] \subset B$ 收敛于 $\beta \in A$. □

练习题 1.9（P_{41}） 1, 2, 3, 4.

§1.10　有限覆盖定理

定义 1.12　设 Λ 是指标集(即非空集合)，$J=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是开区间族. 若实数集 $A\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$，则称开区间族 J 覆盖了 A.

定理 1.14(Heine-Borel 有限覆盖定理) 若开区间族 J 覆盖了有限闭区间 $[a,b]$，则必可从 J 中选出有限个开区间，这有限个开区间所组成的族仍然覆盖了 $[a,b]$.

证:(用闭区间套定理反证)假定 $[a,b]$ 不能被 J 中的有限个开区间所覆盖，则 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 中必有一个不能被 J 中的有限个开区间所覆盖，以 $[a_1,b_1]$ 记之；$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ 中必有一个不能被 J 中的有限个开区间所覆盖，以 $[a_2,b_2]$ 记之；$\cdots$. 于是，闭区间 $I_n=[a_n,b_n](n\in\mathbb{N}^*)$ 满足 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$ 和 $|I_n|=\frac{b-a}{2^n}\to 0\,(n\to\infty)$. 由闭区间套定理，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 是独点集 $\{\beta\}$. 取 J 中的开区间 I_{λ_0} 使得 $\beta\in I_{\lambda_0}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，故当 n 充分大时 $[a_n,b_n]\subset I_{\lambda_0}$，得到矛盾. □

注记 1.14′　定理 1.14 是实数完备性或连续性的一种表现形式.

实数完备性或连续性的 7 个等价命题

$$
\begin{array}{ccccccc}
\textit{Cauchy}\text{收敛原理} & \to & \text{单调有界收敛定理} & \to & \text{闭区间套定理} & \to & \text{有限覆盖定理} \\
 & \nwarrow & \downarrow & \nwarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{列紧性定理} & & \text{确界原理} & \leftrightarrow & \mathbb{R}\text{的连通性}
\end{array}
$$

练习题 1.10（P_{43}）　1, 2.