§1.5 数列极限概念的推广

定义 1.6 设$\{a_n\}$是数列. 若$\forall A>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当$n>N$时成立$a_n>A$, 则称$\{a_n\}$趋向于$+\infty$或$\{a_n\}$以$+\infty$为极限, 记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$或$a_n\to+\infty(n\to\infty)$；若$\forall A>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当$n>N$时成立$a_n<-A$, 则称$\{a_n\}$趋向于$-\infty$或$\{a_n\}$以$-\infty$为极限, 记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$或$a_n\to-\infty(n\to\infty)$；若$\forall A>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当$n>N$时成立$|a_n|>A$, 则称$\{a_n\}$趋向于∞或$\{a_n\}$以∞为极限, 记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$或$a_n\to\infty(n\to\infty)$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$；$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$；$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$.

定义 1.7 称以∞为极限的数列$\{a_n\}$为无穷大数列.

命题

(1) 无穷大数列一定无界；

(2) 无界数列一定有一个无穷大子列；

(3) $\{a_n\}$趋向于∞（或$\pm\infty$）当且仅当$\{a_n\}$的任意子列趋向于∞（或$\pm\infty$）；

(4) 若$a_n\neq0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，则$\{a_n\}$是无穷大数列$\Leftrightarrow\{\dfrac{1}{a_n}\}$是无穷小数列.

符号 记$\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}$, 以自然的方式规定其大小.

练习题 1.5（P_{25}） 1, 6.

§1.6　单调数列

定义 1.8　若数列$\{a_n\}$满足$a_n \le a_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, 则称其单调增加(递增)；若满足$a_n \ge a_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, 则称其单调减少(递减)；这两种数列都称为单调数列.

定理 1.8　有界的单调数列$\{a_n\}$一定收敛.

证: (仅用实数的定义来证)不妨设$\{a_n\}$是一个有上界的非负递增数列,

$$\begin{aligned}
&a_1 = A_0^{(1)}.p_1^{(1)}p_2^{(1)}p_3^{(1)}\cdots,\\
&a_2 = A_0^{(2)}.p_1^{(2)}p_2^{(2)}p_3^{(2)}\cdots,\\
&a_3 = A_0^{(3)}.p_1^{(3)}p_2^{(3)}p_3^{(3)}\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(有尽小数采用一种固定的表示法).

非负整数列$\{A_0^{(n)}\}$递增有界, 故$\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得当$n \ge N_0$时$A_0^{(n)} = A$(非负整数)；

非负整数列$\{p_1^{(n)}\}$($n \ge N_0$)递增有界, 故$\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, N_1 \ge N_0$, 使得当$n \ge N_1$时$p_1^{(n)} = x_1$($0,1,\cdots,9$中的某个数)；

非负整数列$\{p_2^{(n)}\}$($n \ge N_1$)递增有界, 故$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*, N_2 \ge N_1$, 使得当$n \ge N_2$时$p_2^{(n)} = x_2$($0,1,\cdots,9$中的某个数)；

以此类推, 可找到正整数列$N_0 \le N_1 \le N_2 \le \cdots$, 使得当$n \ge N_k$时成立$A_0^{(n)} = A$, $p_1^{(n)} = x_1$, $p_2^{(n)} = x_2$, $\cdots$, $p_k^{(n)} = x_k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. 于是

$$a = A.x_1x_2x_3\cdots$$

是一个实数. 下面证明$\{a_n\}$收敛于a.

$\forall \varepsilon > 0$, 取$\mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$使$10^{-k} < \varepsilon$, 令$N = N_k$, 则当$n \ge N$时成立

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| &= |A_0^{(n)}.p_1^{(n)}\cdots p_k^{(n)}p_{k+1}^{(n)}\cdots - A.x_1\cdots x_k x_{k+1}\cdots| \\
&= |A.x_1\cdots x_k p_{k+1}^{(n)}\cdots - A.x_1\cdots x_k x_{k+1}\cdots| \\
&= |0.0\cdots 0 p_{k+1}^{(n)}\cdots - 0.0\cdots 0 x_{k+1}\cdots| \\
&\le 10^{-k} < \varepsilon. \ \square
\end{aligned}
$$

注记 1.8′ 定理 1.8 是实数完备性或连续性的一种表现形式.

术语 对于数列$\{a_n\}$, 若新数列$\{\sum_{k=1}^{n}|a_k - a_{k+1}|\}$有界, 则称$\{a_n\}$是有界变差数列. 显然有界的单调数列一定是有界变差数列.

命题(定理 1.8 的推广) 有界变差数列$\{a_n\}$一定收敛.

证: 令 $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k - a_{k+1}| + (a_k - a_{k+1})}{2}, y_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k - a_{k+1}| - (a_k - a_{k+1})}{2}$，则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界的递增数列，因而都收敛. 记 $z_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = x_n - y_n$, 则$\{z_n\}$也收敛. 由$z_n = a_1 - a_{n+1}$, 便知$\{a_n\}$收敛. □

例 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$.

证: 令 $x_n = \frac{|a|^n}{n!}$，则当$n \ge |a|$时成立$x_{n+1} = x_n\frac{|a|}{(n+1)} \le x_n$，这说明当 $n \ge |a|$ 时 $\{x_n\}$ 递减有下界，故存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$. 在等式 $x_{n+1} = x_n\frac{|a|}{(n+1)}$两边同时取极限, 便得到$x = 0$. □

例 2 数列$\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\}$趋向于$+\infty$.

证: 记$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 则$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} \ge \frac{n}{n+n}$

$=\dfrac{1}{2}$.（反证法）假定$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$和$\{a_{2n}\}$都收敛于同一个数，则$0=\lim\limits_{x\to\infty}(a_{2n}-a_n)\geq\dfrac{1}{2}$，导致矛盾．于是，$\{a_n\}$无上界，这说明$\forall A>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得$a_N>A$，因而当$n>N$时成立$a_n>A$，即$\{a_n\}$趋向于$+\infty$. □

例 3　当$\alpha\leq 1$时，数列$\{1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\}$趋向于$+\infty$；当$\alpha>1$时，数列$\{1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\}$收敛.

证：　当$\alpha\leq 1$时，$1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\geq 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，故$\{1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\}$趋向于$+\infty$.

当$\alpha>1$时，记$a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}$，则$\forall k\in\mathbb{N}^*$，有

$$a_{2^{k+1}-1}=a_{2^k-1}+\frac{1}{(2^k)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}\leq a_{2^k-1}+\frac{2^{k+1}-2^k}{(2^k)^\alpha}=a_{2^k-1}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k.$$

由递推关系得到$a_{2^{k+1}-1}\leq 1+\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k\leq\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$，这说明子列$\{a_{2^{k+1}-1}\}$有上界，因而$\{a_n\}$也有上界，故$\{a_n\}$收敛. □

定理 1.9（闭区间套定理）　若闭区间$I_n=[a_n,b_n](n\in\mathbb{N}^*)$满足$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$，并且$|I_n|=b_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$是独点集$\{a\}$，其中$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$（注意：定理 1.9 中的“闭区间”不能换成一般的区间）.

证：显然$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$都存在，并且$0\leq b-a\leq b_n-a_n$，故$a=b$.

于是$\forall n\in\mathbb{N}^*, a\in[a_n, b_n]$, 即$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$. 此外, 显然$\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$不能含有两个或两个以上的点. □

注记 1.9′ 定理 1.9 是实数完备性或连续性的一种表现形式.

练习题 1.6（P_{29}） 2, 3, 4, 5.

问题 1.6（P_{30}） 3.

§1.7 自然对数的底 e

记 $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$， $s_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$.

命题 $\{e_n\}$和$\{s_n\}$都是严格递增的有界数列, 并且满足$2\le e_n\le s_n<2\dfrac{3}{4}$, 称以$\lim\limits_{x\to\infty}e_n=e$作底的对数为自然对数, 记成$\log$（或$\ln$）. 此外, 还有

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=e$, $0<e-s_n<\dfrac{1}{nn!}\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $2\dfrac{1}{2}<e<2\dfrac{3}{4}$.

证:
$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$\le s_n\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{2\times 3^{n-2}}<2\frac{3}{4}.$$
$$e_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)>e_n.$$

由
$$e>e_{n+m}=1+\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+m}\right)\left(1-\frac{2}{n+m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+m}\right)$$
$$>1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+m}\right)\left(1-\frac{2}{n+m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+m}\right),$$

令$m\to\infty$便得到$e\ge s_n\ge e_n$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=e, s_n<e$. 此外,

$$s_{n+m}-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}]$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}]<\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1},$$

令 $m\to\infty$ 便得到 $e-s_n\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{nn!}$. 最后, $e>s_2=2\frac{1}{2}$, $e<s_2+\frac{1}{2\times 2!}=2\frac{3}{4}$. □

定理 1.10 自然对数的底 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots$ 是无理数.

证: (反证法) 假定存在 $p,q\in\mathbb{N}^*$ 使得 $e=\frac{p}{q}\notin\mathbb{N}^*$, 显然 $q\ge 2$. 于是, $0<q!(e-s_q)<q!\frac{1}{qq!}\le\frac{1}{2}$, 这与 $q!(e-s_q)=q![\frac{p}{q}-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!})]$ 是整数相矛盾. □

练习题 1.7（P_{32}）1(2, 4), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

问题 1.7（P_{34}） 2, 3, 4.