数学模型

综合评价法

第九章　综合评价方法

主要内容

- 综合评价的基本概念；
- 综合评价的一般方法；
- 动态加权综合评价方法；
- 案例分析：长江水质的综合评价问题。

一、综合评价的基本概念

1.构成综合评价问题的五个要素

构成综合评价问题的五个要素分别为:被评价对象、评价指标、权重系数、综合评价模型和评价者。

（1）被评价对象

被评价对象就是综合评价问题中所研究的对象，或称为系统。通常情况下，在一个问题中被评价对象是属于同一类的，且个数要大于 1，不妨假设一个综合评价问题中有 n 个被评价对象（或系统），分别记为 $S_1,S_2,\cdots,S_n(n>1)$。

一、综合评价的基本概念

1.构成综合评价问题的五个要素

（2）评价指标

评价指标是反映被评价对象（系统）的运行（发展）状况的基本要素。通常的问题都是有多项指标构成，每一项指标都是从不同的侧面刻画系统所具有某种特征大小的一个度量。

一个综合评价问题的评价指标一般可用一个向量表示，即称为综合评价的指标体系。

评价指标体系的原则：系统性、科学性、可比性、可测性（即可观测性）和独立性。不妨设系统有 m 个评价指标（属性），分别记为 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m>1)$，即评价指标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 。

1.构成综合评价问题的五个要素

（3）权重系数

针对某种评价目的，各评价指标之间的相对重要性是不同的，这种相对重要性的大小用权重系数来刻画。如果用 w_j 来表示 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的权重系数，则应有

$$w_j \geq 0(j=1,2,\cdots,m)，且 \sum_{j=1}^{m} w_j = 1。$$

注意：当各被评价对象和评价指标值确定后，综合评价结果就完全依赖于权重系数了，即权重系数确定的合理与否，关系到评价结果的可信度，甚至影响到最后决策的正确性。

（4）综合评价模型

通过建立数学模型将多个评价指标综合成为一个整体的指标，作为综合评价的依据，得到综合评价结果。

不妨假设 n 个被评价对象的 m 个评价指标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$，指标权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^T$，由此构造综合评价函数为 $y=f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})$。

如果已知各指标 N 个观测值为 $\{x_{ij}\}(i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,m)$，则计算出各系统的综合评价值 $y_i=f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}^{(i)})$，$\boldsymbol{x}^{(i)}=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})^T$ $(i=1,2,\cdots,n)$。根据 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 值的大小将这 n 个系统进行排序或分类,即综合评价结果。

1.构成综合评价问题的五个要素

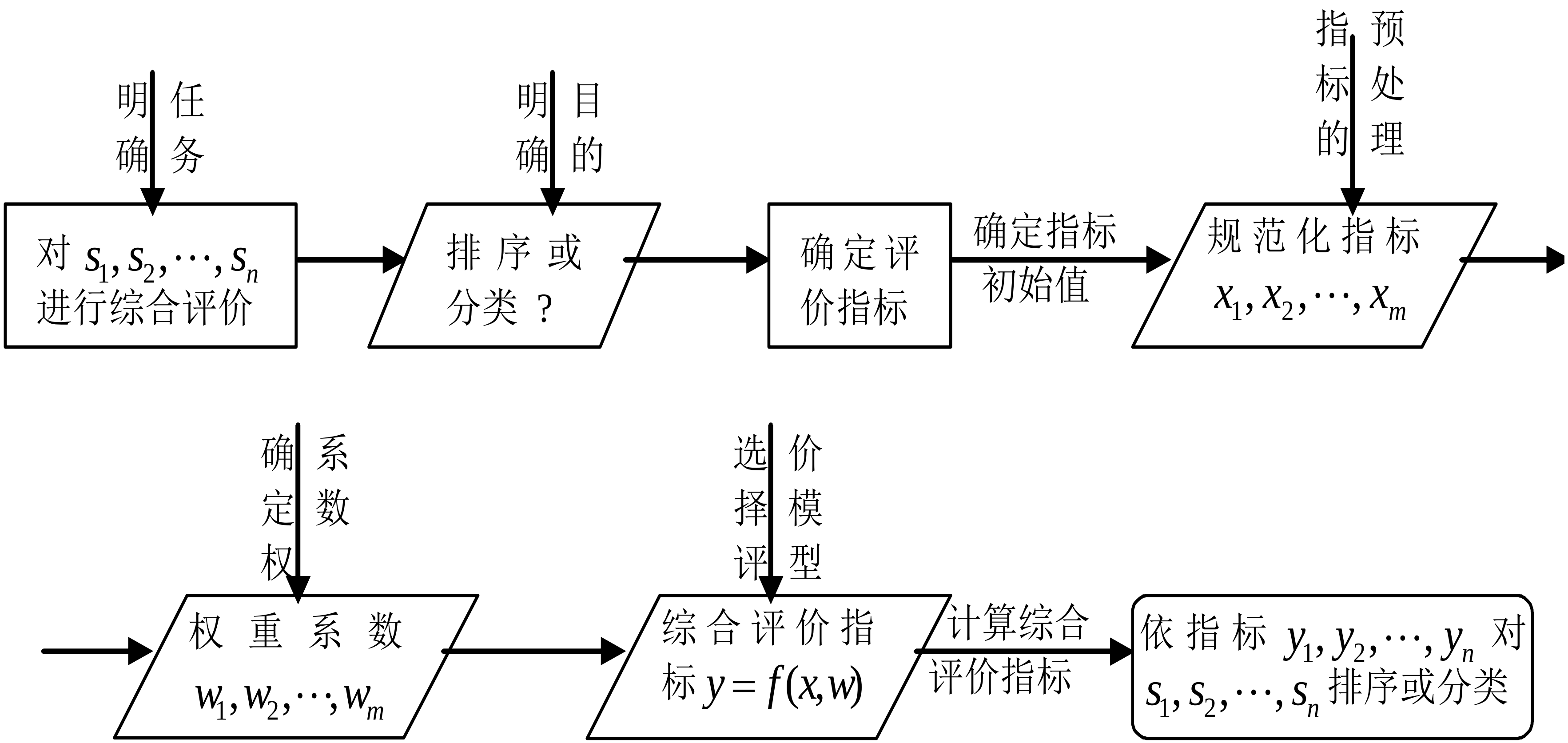
（5）评价者

评价者是直接参与评价的人，某一个人，或一个团体。对于评价目的选择、评价指标体系确定、评价模型的建立和权重系数的确定都与评价者有关。

综合评价的一般步骤：

明确评价目的；确定被评价对象；建立评价指标体系；确定权重系数；构造综合评价模型；计算综合评价值, 并给出评价结果。

2 .综合评价的一般步骤与流程



1 .评价指标体系的建立及筛选方法

一般原则：

尽量少的选取“主要”的评价指标。按照系统性、科学性、可比性、可测性和独立性原则筛选，分清主次，取主略次。

（1）专家调研法

评价者根据综合评价的目的和被评价对象的特点，可以向若干名专家咨询和征求意见进行调研，对专家们的意见进行统计处理，将意见相对趋于集中的指标作为最后实际评价指标体系。

1 .评价指标体系的建立及筛选方法

（2）最小均方差法

1）求第 j 项指标的平均值： $\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\ (j=1,2,\cdots,m)$；

2）求均方差： $s_j=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}\quad (j=1,2,\cdots,m)$；

3)求最小的均方差： $s_{j_0}=\min(s_1,s_2,\cdots,s_m)\quad (1\le j_0\le m)$；

4）如果 $s_{j_0}\approx 0$，则可将第 j_0 个指标 x_{j_0} 删除掉。

类似地，还有极小极大离差法和相关系数法等。

2．综合评价指标的预处理方法

（1） 评价指标类型的一致化

实际中的评价指标 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m>1)$ 可能有“极大型”、“极小型”、“中间型”和“区间型”指标。

极大型指标:取值越大越好;

极小型指标:取值越小越好;

中间型指标:取值既不要太大，也不要太小为好，即取适当的中间值为最好;

区间型指标:取值最好是落在某一个确定的区间内为最好。

2.综合评价指标的预处理方法

（1） 评价指标类型的一致化

1）极小型指标：对极小型指标 x，则 $x' = \frac{1}{x}(x>0)$，或 $x' = M - x$，其中 M 为 x 可能的最大值，即可将指标 x 极大化。

2）中间型指标：对中间型指标 x，则

$$x' = \begin{cases} \frac{2(x-m)}{M-m}, & m \le x \le \frac{1}{2}(M+m) \\ \frac{2(M-x)}{M-m}, & \frac{1}{2}(M+m) \le x \le M \end{cases}$$

其中 M 和 m 分别为 x 的最大值和最小值，即可将 x 极大化。

2. 综合评价指标的预处理方法

（1） 评价指标类型的一致化

3）区间型指标

对区间型指标 x，则通过变换

$$x' = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{c}, & x < a \\ 1, & a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x-b}{c}, & x > b \end{cases}$$

其中 $[a,b]$ 为 x 的最佳稳定区间，$c = \max\{a-m, M-b\}$，即可将 x 极大化。

2．综合评价指标的预处理方法

(2) 数据指标的无量纲化处理方法

在实际数据指标之间，往往存在着不可公度性，会出现“大数吃小数”的错误、从而导致结果的不合理。

常用方法: 标准差法、极值差法和功效系数法等。

假设 m 个数据指标 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，不妨设已做了类型的一致化，并有 n 组样本观测值 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$。

2 . 综合评价指标的预处理方法

(2) 数据指标的无量纲化处理方法

1) 标准差方法

令 $x'_{ij} = \dfrac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$，

其中 $\bar{x}_j = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}, s_j = [\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2]^{1/2} (j = 1, 2, \cdots, m)$。

显然 $x'_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$ 的均值和均方差分别为 0 和 1，即 $x'_{ij} \in [0, 1]$ 是无量纲的，称之为 x_{ij} 的标准观测值。

2. 综合评价指标的预处理方法

(2) 数据指标的无量纲化处理方法

2) 极值差方法

令 $x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，

其中 $M_j=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}\},m_j=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}\}(j=1,2,\cdots,m)$。

则 $x'_{ij}\in[0,1]$是无量纲的标准观测值。

2 . 综合评价指标的预处理方法

(2) 数据指标的无量纲化处理方法

3) 功效系数方法

令 $x'_{ij}=c+\dfrac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j}\cdot d\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，

其中 c,d 均为确定的常数。c 表示“平移量”， d 表示“旋转量”，即表示“放大”或“缩小”倍数。

则 $x'_{ij}\in[c,c+d]$。

譬如若取 $c=60,d=40$，则 $x'_{ij}\in[60,100]$。

3. 评价指标权重系数的确定方法

（1）基于“指标功能”的赋权方法

假设一个理想的评价系统是由 m 种“物质”构成的，其质量分别记为 $M_1, M_2, \cdots, M_m$，则第 j 种“物质”的权重系数 w_j 就可以定义为

$$w_j = M_j \Big/ \sum_{k=1}^{m} M_k \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

这是从主观的途径确定的权重系数。

3. 评价指标权重系数的确定方法

（2）基于“指标差异”的赋权方法

常用方法：突出整体差异的“拉开档次”法、突出局部差异的均方差法和极差法等。

1）突出整体差异的“拉开档次”法

“拉开档次”法：通过选择合适的指标权重系数，使得各被评价对象之间的差异尽量拉大。

特点：具有较好的再现性和过程的透明性；评价结果的客观性和可比性较好；主观因素的影响小。

3. 评价指标权重系数的确定方法

（2）基于“指标差异”的赋权方法

2）突出局部差异的均方差法、极差法和熵值法

均方差法、极差法和熵值法：根据被评价对象的同一个指标观测值之间的差异程度来确定相应指标的权重系数，由此来反映其重要的程度。

这些基于“指标差异”的赋权方法是一类“求大异存小同”的方法。

特点：客观性强，无主观因素的影响，评价过程的透明性和再现性好。

3. 评价指标权重系数的确定方法

（3）基于综合集成的赋权法

1）加法集成法

求由主客观两种赋权法所确定的权重系数的加权和。即如果 p_j 和 q_j 分别是由“指标功能”赋权法和“指标差异”赋权法所确定的指标 x_j 的权生系数，

则令

$$w_j = k_1 p_j + k_2 q_j \ (j = 1,2,\cdots,m)$$

其中 k_1, k_2 为待定常数，$k_1, k_2 > 0$，且 $k_1 + k_2 = 1$。

3. 评价指标权重系数的确定方法

（3）基于综合集成的赋权法

2）乘积集成法

求由主客观的两种赋权法所得到的权重系数的乘积，并做标准化处理。即令

$$w_j = p_j q_j \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

表示同时具有主客观信息特征的权重系数。

4．综合评价数学模型的建立方法

设有 n 个被评价对象，每个被评价对象都有 m 项评价指标，即 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})(i=1,2,\cdots,n)$，相应的权重系数向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$，则构造综合评价函数 $y=f(w,x)$，即为综合评价的数学模型.

n 个被评价对象的综合评价指标值

$$y_i=f(w,x_i)(i=1,2,\cdots,n),$$

按 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的大小将 n 个被评价对象进行排序或分类。

4．综合评价数学模型的建立方法

（1）线性加权综合法

线性加权综合法:应用线性模型 $y=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j$ 来进行综合评价。

特点：方法简单易于计算，便于推广应用；对于指标数据没有特定的要求；各指标之间的互补性强，但对各备选方案之间的差异反应不敏感。

4．综合评价数学模型的建立方法

（2）非线性加权综合法

非线性加权综合法:应用非线性模型 $y=\prod_{j=1}^{m} x_j^{w_j}$ 来进行综合评价。

特点：对于指标数据有一定的要求；突出了指标的个性，淡化了重权系数的作用；对各备选方案之间的差异反应敏感；计算较为复杂。

4. 综合评价数学模型的建立方法

(3). 逼近理想点（TOPSIS）方法

基本思想：设定系统指标的一个理想点 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$，对每一个被评价对象与理想点进行比较。

如果某一个被评价对象指标 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ 在某种意义下与理想点 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ 最接近，则 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ 就是最好的。

基于这种思想的综合评价方法称为逼近理想点的排序方法（The technique for order preference by similarity to ideal solution，简称为 TOPSIS）。

4．综合评价数学模型的建立方法

(3). 逼近理想点（TOPSIS）方法

假设理想点为$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$，对于被评价对象$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$，定义二者之间的加权距离为

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} w_j f(x_{ij} x_j^*), i = 1,2,\cdots,n,$$

其中w_j为权系数，$f(x_{ij}, x_j^*)$为x_{ij}与x_j^*之间的某种意义下距离。

4．综合评价数学模型的建立方法

(3). 逼近理想点（TOPSIS）方法

通常情况下可取 $f(x_{ij},x_j^*)=(x_{ij}-x_j^*)^2$，则综合评价函数为 $y_i=\sum_{j=1}^{m}w_j(x_{ij}-x_j^*)^2, i=1,2,\cdots,n$。

按照 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 值的大小对各被评价方案进行排序选优，其值越小方案就越好。

特别地，当某个 $y_i=0$ 时，则对应的方案就是最优的。

1．动态加权综合评价的一般问题

设有 n 个被评价对象（或系统）$S_1,S_2,\cdots,S_n(n>1)$，每个系统都有 m 属性（或评价指标）$x_1,x_2,\cdots,x_m(m>1)$。

对每一个 x_i 都可分为 K 个等级 $p_1,p_2,\cdots,p_K$ $(K>1)$。而对每一个 p_k 都包含一个 $[a_k^{(i)},b_k^{(i)})$，且 $a_k^{(i)}<b_k^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,K)$，即当 $x_i\in[a_k^{(i)},b_k^{(i)})$ 时，则 x_i 属于第 k 类 p_k $(1\le k\le K)$。

问题:如何对*n*个系统做出综合评价呢?

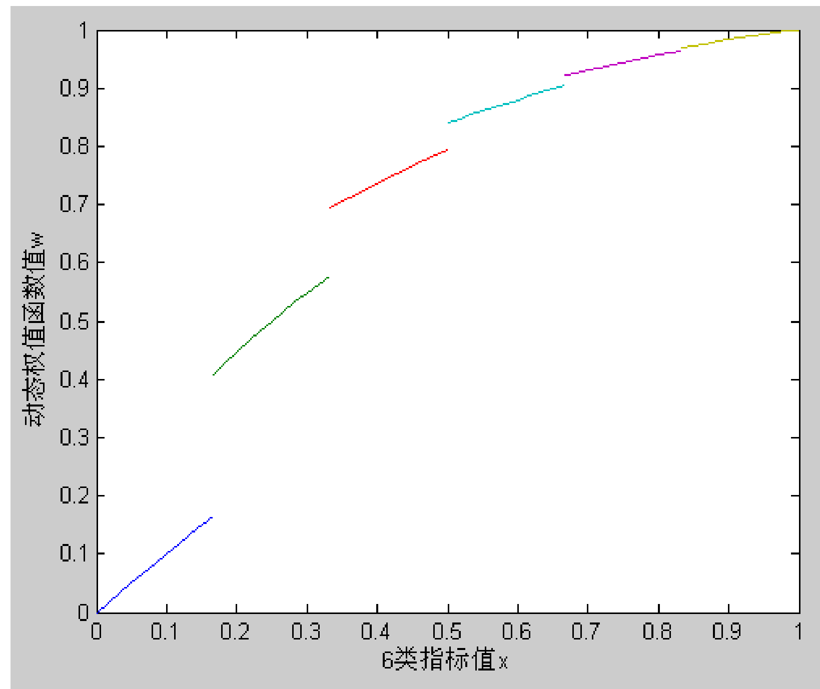
2．动态加权函数的设定方法

（1） 分段变幂函数

如果某项指标 x_i 对评价效果的影响大约是随着类别 p_k 的增加而按正幂次增加；同时在某一类中随着指标值的增加按相应的一个幂函数增加。则对 x_i 可设定分段变幂函数为变权函数。

$$w_i(x) = x^{\frac{1}{k}},\ \ x \in [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]\ ,\ (k = 1, 2, \cdots, K)$$

其中$1 \le i \le m$。



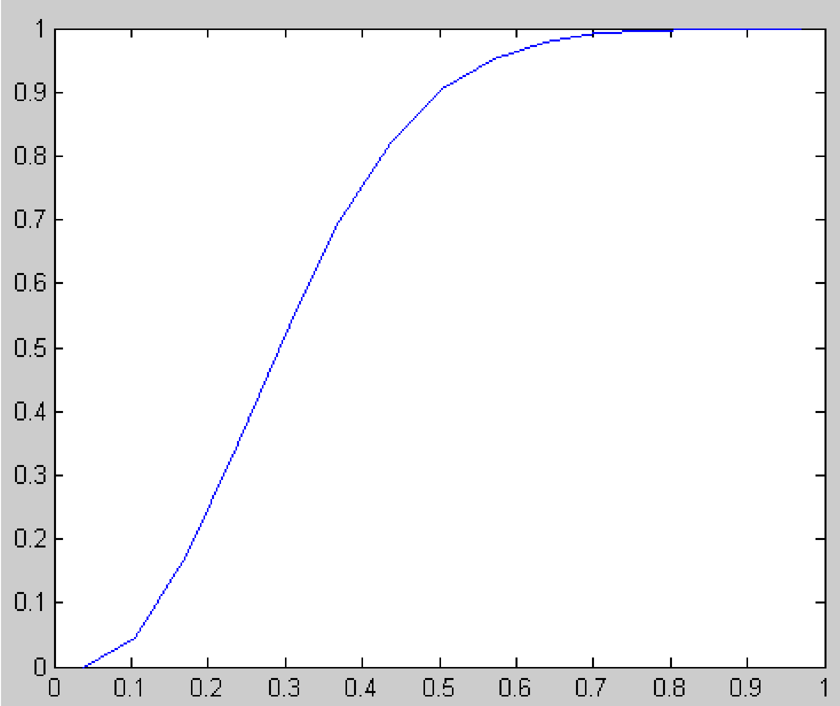
2.动态加权函数的设定方法

（2）偏大型正态分布函数

若某项指标 x_i 对评价效果的影响大约是随着类别 p_k 的增加，先缓慢增加，中间有一个快速增长的过程，随后平缓增加趋于最大，相应的图形呈正态分布曲线（左侧）形状。则对 x_i 的变权函数可设定为偏大型正态分布函数。

$$w_i(x)=\begin{cases}0\quad, & \text{当 } x\le\alpha_i \text{ 时},\\ 1-e^{-\left(\frac{x-\alpha_i}{\sigma_i}\right)^2}, & \text{当 } x>\alpha_i \text{ 时},\end{cases}$$

其中参数 α_i 可取 $[a_1^{(i)},b_1^{(i)})$ 中的某定值。

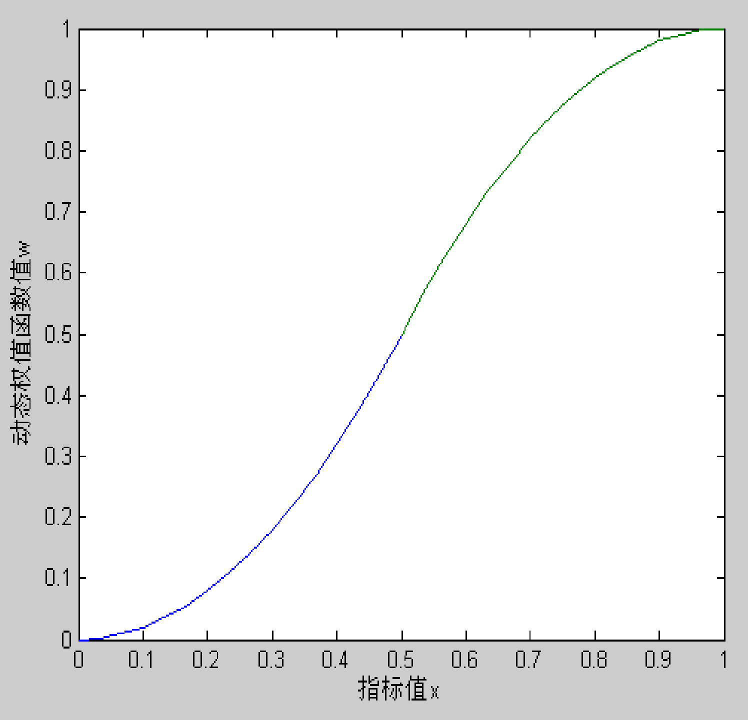


2.动态加权函数的设定方法

（3）S 型分布函数

若某项指标 x_i 对评价效果影响是随着类别 p_k 增加而增加的过程，呈一条“S”曲线，则对指标 x_i 的变权函数可设定为 S 型分布函数。

$$w_i(x)=\begin{cases}2\left(\dfrac{x-a_1^{(i)}}{b_K^{(i)}-a_1^{(i)}}\right)^2, a_1^{(i)}\le x\le c,\\ 1-2\left(\dfrac{x-b_K^{(i)}}{b_K^{(i)}-a_1^{(i)}}\right)^2, c<x\le b_K^{(i)},\end{cases}$$



其中参数 $c=\dfrac{1}{2}(a_1^{(i)}+b_K^{(i)})$，且 $w_i(c)=0.5$。

$(1\le i\le m)$

3. 综合评价模型的构建方法

根据标准化后的指标值 x_i，相应动态权函数 $w_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$，则 n 个系统的综合评价模型

$$X=\sum_{i=1}^{m} w_i(x_i)\cdot x_i \text{。}$$

若每个系统的 m 个属性都 N 组样本观测值 $\{x_{ij}\}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,N)$，则每一个系统都有 N 个综合评价指标值 $X_k(j)(k=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,N)$。按其大小排序可给出 n 个系统的 N 个排序方案。

4. 综合评价结果的排序方法

Borda 函数方法：在第 j 个排序方案中排在第 k 个系统 S_k 后面的个数为 $B_j(S_k)$，则系统 S_k 的 Borda 数为

$$B(S_k)=\sum_{j=1}^{N}B_j(S_k)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

按其大小排序，可得到 n 个系统的综合排序结果，即总排序结果。

1．问题的提出

针对长江水质的综合评价这一问题，采用动态加权综合评价方法来解决。假设 17 个城市为被评价对象 $S_1, S_2, \cdots, S_{17}$，共有四项评价指标（或属性）DO、CODMn、NH3-N 和 PH 值，分别记为 x_1, x_2, x_3 和 x_4，前三项指标都有 6 个等级 $p_1, p_2, \cdots, p_6$，相应的分类区间值如表（1）所示，而 PH 值没有等级之分。

表（1）：《地表水环境质量标准》（GB3838—2002）中 4 个主要项目标准限值　　单位：mg/L

指　标	Ⅰ类	Ⅱ类	Ⅲ类	Ⅳ类	Ⅴ类	劣Ⅴ类
溶解氧(DO)	[7.5,∞)	[6,7.5)	[5,6)	[3,5)	[2,3)	[0,2]
高锰酸盐指数(CODMn)	(0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,10]	(10,15]	(15, ∞)
氨氮（NH3-N）	(0,0.15]	(0.15,0.5]	(0.5,1]	(1,1.5]	(1.5,2]	(2, ∞)
PH 值（无量纲）	[6 , 9]					

2．数据的标准化处理

（1）溶解氧（DO）的标准化

溶解氧为极大型指标，令倒数变换 $x_1' = \dfrac{1}{x_1}$，将数据指标作极小化，用极差变换 $x_1'' = \dfrac{x_1'}{0.5}$ 将其数据标准化。

（2）高锰酸盐指数（CODMn）的标准化

高锰酸盐指数是极小型指标， 令 $x_2' = \dfrac{x_2}{15}$ 将其数据标准化。

2．数据的标准化处理

（3）氨氮（NH3-N）的标准化

氨氮是极小型指标，令 $x_3' = \dfrac{x_3}{2}$ 将其数据标准化.

（4）PH 值的处理

PH 值属于中间型指标。令

$$x_4' = \frac{|x_4 - 7.5|}{1.5} = \frac{2}{3}|x_4 - 7.5|,$$

则将其数据标准化。

3. 动态加权函数的设定

根据实际问题，取动态加权函数为偏大型正态分布函数，即

$$w_i(x)=\begin{cases}0\quad, & 当 x\le\alpha_i 时,\\ 1-e^{-\left(\frac{x-\alpha_i}{\sigma_i}\right)^2}, & 当 x>\alpha_i 时,\end{cases}$$

其中 $\alpha_i=(b_1^{(i)}-a_1^{(i)})/2$，$\sigma_i$ 由 $w_i(a_4^{(i)})=0.9(i=1,2,3)$ 确定。

由实际数据可得 $\alpha_1=0.1333,\alpha_2=0.0667,\alpha_3=0.0375$，$\sigma_1=0.1757,\sigma_2=0.2197,\ \sigma_3=0.3048$，则代入上式可以得到 DO、CODMn 和 NH3-N 三项指标的动态加权函数。

4. 综合评价指标函数的确定

考虑到对实际评价效果影响差异较大的是前三项指标，以及指标 PH 值的特殊性，某城市某一时间的水质综合评价指标定义为

$$X=0.8\sum_{i=1}^{3}w_i(x_i)x_i+0.2x_4。$$

根据 17 个城市的 28 组实际检测数据，经计算可得各城市的水质综合评价指标值，即可得到一个 17×28 阶的综合评价矩阵 $(X_{ij})_{17\times28}$。

5. 各城市水质的综合评价

由 17 个城市 28 个月的水质综合评价指标 $X_{ij}(i=1,2,\cdots,17;\ j=1,2,\cdots,28)$，根据上述的模型计算得总排序结果如下表。

表(2)：按各城市的水质污染总排序结果

城市 / 排序	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	6	7			S_{10}		S_{12}		S_{14}	S_{15}	S_{16}	S_{17}
Borda 数	203	136	143	234	106	139	138	378	232	271	60	357	277	264	438	214	217
总排序	11	15	12	7	16	13	14	2	8	5	17	3	4	6	1	10	9